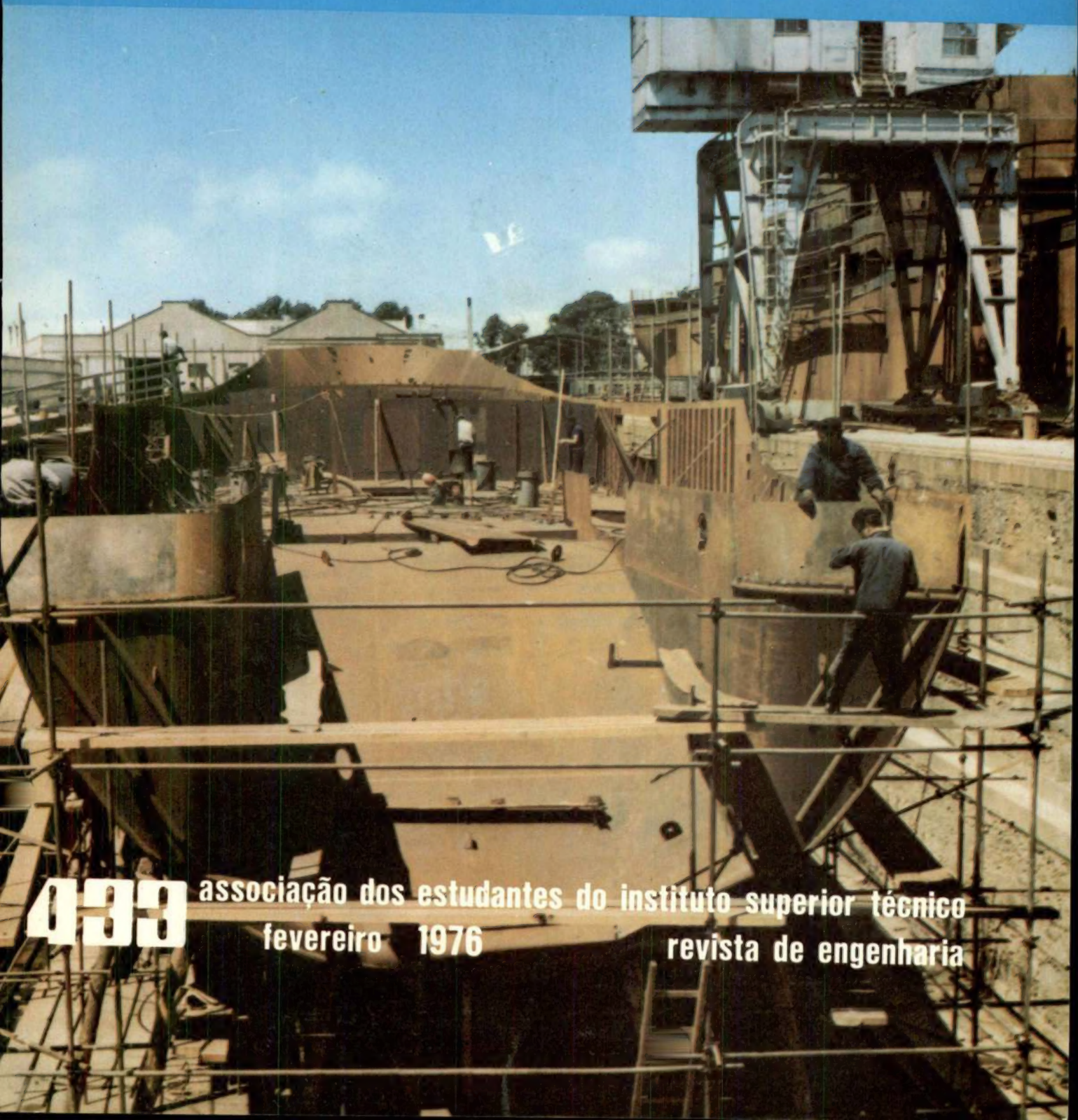
técnica



433
associação dos estudantes do instituto superior técnico
fevereiro 1976
revista de engenharia

CÁLCULO
DE
PÓRTICOS

Método de cálculo simples e rápido, entrando em linha de conta com o deslocamento dos nós

Por

G. KANI

Traduzido por

ANÍBAL S. A. VIEIRA

Engenheiro civil (I. S. T.)

TÉCNICA

Associação dos Estudantes do I. S. T.

LISBOA — 1962

PREÇO 75.00

DESC. 10% AOS ASSINANTES

técnica

NÚMERO 433 FEVEREIRO DE 1976 ANO LI VOLUME XXXVI PUBLICAÇÃO MENSAL

DIRECTOR
Delmar Baptista

COLABORADORES
António Maria da Fonseca
José Agostinho Marques
Jorge Braz
Armando Ruano
Manuel M. S. Anastácio
José Luís S. V. Azevedo

DIRECÇÃO REDACÇÃO
E ADMINISTRAÇÃO

Av. Rovisco Pais, I. S. T. — Lisboa
Telefone 72 93 23

PROPRIETÁRIO
A. E. I. S. T.

★

ASSINATURAS:	5 n.os	10 n.os
Continente e Ilhas	140$00	250$.
Países de língua Portuguesa e Espanha	150$00	270$.
Estrangeiro	—	300$.
Número avulso ...	—	35$.

Não se publica em Agosto e Setembro.

Os artigos assinados são da exclusiva responsabilidade dos autores.

★

MOVIGRÁFICA
COMPOSIÇÃO E IMPRESSÃO:
Rua do Espírito Santo, 19-A - Odivelas

SUMÁRIO

175 — JOSÉ QUINTINO ROGADO — Sobre a reestruturação da carreira docente nas universidades portuguesas (dedicação exclusiva; natureza dos cursos; autonomia).

On the reorganization of the portuguese universities teaching (full-time professors'status; kind of courses; autonomy).

183 — J. S. BRAZÃO FARINHA — Cálculo de estruturas reticuladas no espaço.

Analysis of space frames.

201 — ANTÓNIO GOUVÊA PORTELA — Introdução aos conjuntos vagos.

Introduction to fuzzy sets.

219 — H. J. S. ABREU SANTOS — Obtenção por simulação numérica da distribuição em energia de uma população de electrões.

A numerical simulation method to obtain the energy distribuition of a population of electrons.

231 — C. L. BOLTZ — Research and the future.

A investigação e o futuro.

CAPA — Estaleiros navais de Viana do Castelo.

ÍNDICE ALFABÉTICO DOS ANUNCIANTES

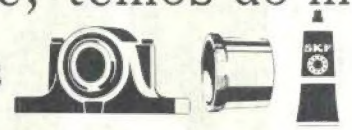
	Pág
Aguiar & Melo, Lda.	VI
Fanafel	IV
Ferrunil	II
MAGUE	III
Novobra, Lda.	IV
Soc. Electricidade Brown Boveri	V
Sociedade Portuguesa Cavan . .	II
S. K. F., Lda.	I
Sondagens e Fundações A. Cavaco	II

SKF

A SKF não tem apenas rolamentos de esferas e de rolos .

Temos também rolamentos de agulhas

rótulas e embutes .

Evidentemente, temos do mesmo modo toda a espécie de acessórios  para rolamentos.

Além disso a SKF fabrica muitos outros produtos de qualidade.

Rodas e carretos cónicos, por exemplo

Fusos roscados de rolamento de alta precisão que transformam o movimento de rotação em linear.

Fabricamos também machos cassonetes

e brocas .

O mesmo se passa com pontos rotativos .

E muitos sabem que também temos um bom Serviço Técnico.

SOCIEDADE SKF LIMITADA

LISBOA - PRAÇA DA ALEGRIA, 66-A
TELEF.: 362301 - TELEGR.: ESKAEF - TELEX: 12156

PORTO - RUA DELFIM FERREIRA, 604
TELEF.: 692054 - TELEGR.: ESKAEF

AC-M-2

ÁGUAS SUBTERRÂNEAS

ESTUDOS · PESQUISAS CAPTAÇÕES

Prontos para colaborar na reconstrução do País

SONDAGENS E FUNDAÇÕES A. CAVACO, LDA.

RUA RODRIGO DA FONSECA, 62 · LISBOA - 1
TEL. 56 11 71/4 · TELEX 12 476 ACAVAC P · TELEG. ACAVACO

Postes de cimento armado Cavan

Qualidade que desafia o tempo

Cavan

Av. Visconde Valmor, 76-1.º - Tel. 766014 (7 linhas) Lisboa-1

TOPOGRAFIA GERAL

2.º Volume

Pelo Eng.º A. C. XEREZ

Preço 180$00

Descontos: 10% aos assinantes

Pedidos à Técnica

FERRUNIL
CONSTRUÇÕES METÁLICAS INDUSTRIAIS, LDA

ESTRUTURAS - RESERVATÓRIOS
VIGAMENTOS - SILOS
PONTES ROLANTES
EQUIPAMENTO INDUSTRIAL

COBERTURAS PARA:
ARMAZÉNS
UNIDADES INDUSTRIAIS
HANGARES
PAVILHÕES DESPORTIVOS, ETC.

FÁBRICA:
Trajouce 244 0230
244 0256

ESCRITÓRIOS:
Av. Elias Garcia, 162, 2º E (L1) *77 77 96
*77 77 97
*77 75 29
LISBOA *77 26 35

técnica

NÚMERO 433 FEVEREIRO DE 1976 ANO LI VOLUME XXXVI PUBLICAÇÃO MENSAL

CDU 378.12:331.8.00

Sobre a reestruturação da carreira docente nas universidades portuguesas

(dedicação exclusiva; natureza dos cursos; autonomia)

JOSÉ Q. ROGADO
Prof. Catedrático do I. S. T.

RESUMO

O artigo trata do problema da reestruturação da carreira docente nas Universidades Portuguesas, procurando enquadrá-lo dentro de princípios gerais no que respeita o tipo de ensino mais conveniente em face da situação actual Portuguesa.

São tratados com algum detalhe os aspectos de «dedicação exclusiva» e da autonomia das Universidades.

ABSTRACT

The author tackles with general problems connected with the reorganization of the Portuguese University teaching. The attempt is to frame this problem into the new Portuguese situation. The autonomy of the schools and the Professors' status are two points somehow developed in the text.

1. INSERÇÃO POLÍTICA

A chamada reestruturação da carreira docente na sua expressão universitária inclui, na essência, dois aspectos:

1.1. — Por um lado, é exigida pelos estratos docentes menos favorecidos (monitores, assistentes eventuais, assistentes, professores auxiliares, etc.) contrapondo-se ao mandarinato tradicional dos mestres (professores catedráticos, extraordinários e agregados). Aqueles exibem a diferença de vencimentos como principal argumento ao qual costumam juntar a «discriminação» quanto às obrigações de docência de uns e de outros (esta «discriminação» desapareceu já nas escolas portuguesas, onde todos os docentes a partir de assistente eventual, inclusivé, são obrigados ao mesmo tempo semanal e onde a antiga distinção entre aulas teóricas e práticas se esfumou). Exige-se a similitude de tratamento (estreitamento do leque salarial) e a uniformidade de horários. Trata-se pois de uma luta interna no seio da burguesia entre dois estratos da mesma profissão. Sabe-se que, nomeadamente nos países capitalistas, estas diferencas têm tendência para se atenuar, guardando o estrato dos mestres principalmente as vantagens honoríficas, gestionárias de cúpula e as decorrentes destas duas, o que já não é considerado pouco. No entanto, tais nivelamentos nada têm que ver com o carácter altamente selectivo da metodologia adoptada nas promoções, as quais não são efectuadas por antiguidade e sofrem reduzida influência de parte dos grupos de pressão da «nuance» da ideologia burguesa que transitoriamente assume o poder político, embora formas de ostracismo sejam referenciáveis para os docentes entendidos como corifeus de posições anti-burguesas. As promoções fazem-se através as pos-graduações, os doutoramentos, os concursos, actos estes, por um lado sujeitos a disciplina rígida e exigindo grande soma de trabalho e, por outro, da inteira responsabilidade dos mestres. Entende-se que a maior de-

sonra para agreviação universitária é pactuar com a ignorância, a incompetência, a desonestidade intelectual, tudo isto visto pelas ópticas das quasi herméticas sociedades científicas.

E é oportuno referir que, afora a notável influência de alguns independentes de génio, aliás, logo agarrados pelo «estabelecimento», quando se revelaram, na idade moderna, o grande surto das ciências, quer concretas, quer humanas, deve-se a esta organização universitária aliada aos meios e ao «vis a tergo» do desenvolvimento do capitalismo ou do socialismo.

1.2. — Por outro lado, exige-se a reestruturação da carreira docente como consequência ou forma de luta de classes. Trata-se então, e antes de mais, de arrancar a Universidade à burguesia evitando que ela permanentemente reproduza burgueses e que as ciências e tecnologias que vai criando reproduzam o pensamento e os objectivos da burguesia.

Na linha do pensamento de Gramsci dir-se-ia que o «bloco social» tem de contar com os universitários. Após certa fase inicial, o progredir-se mais na construção do socialismo sem mestres ou sem universidade socialistas conduziria, pelo menos em teoria, a uma ditadura do proletariado «sensu stricto» demasiado austera e assustadoramente inoperante e, ainda por cima, nos tempos correntes, presa fácil do anarco-sindicalismo.

Sabe-se como actualmente duas configurações do socialismo dominam diferentemetne este perigo: uma neutralizando-o no seio do partido único com a proliferação de elites de vocação gestionário-burocrática; o outro procurando anulá-lo à custa do revolucionamento dos padrões culturais feito «à posteriori» como medicina para curar disfunções.

Porém, para quem se empenhe em construir o socialismo a partir de configuração identificada com o capitalismo industrial avançado, a noção cautelar de «bloco social» parece uma necessidade lógica, como necessário também o é, consequentemente, que a ele pertençam os universitários.

Percebe-se pois que a reinvindicação da reestruturação da carreira docente universitária, quando originada neste ponto de vista, se manifeste por posições ainda mal definidas, que traduzem alianças tácticas momentâneas, tudo dando a impressão de que se é arrastado pelo movimento geral de uma massa muito vasta da tecitura social.

2 — A ECONOMIA E AS ESCOLAS UNIVERSITÁRIAS DE CIÊNCIAS EXECTAS

Assim sendo, contando com estas duas vias, para fazer eclodir o problema da reestruturação, há que nos situarmos numa delas, notando que boa parte da luta laboral inclusa na primeira é irrelevante no contexto da segunda.

Na sua imersão política, as Universidades ligam-se à economia nomeadamente através das suas Faculdades ou Escolas de Engenharia, Agronomia, Veterinária, Economia, etc. Poderá, pois, pôr-se também a questão de saber-se que Universidade interessará à economia portuguesa em vias de muito importante transformação; o que para ter resposta exige prévia concatenação de algum modelo quasi unanimemente aceite pelos Portugueses.

2.1. — Encastoados na Europa à qual a macro-estrutura da ideologia vigente no antigo regime voltara as costas, os Portugueses vêm sofrendo, apesar de tudo, desde os anos cinquenta, a aliciação pertinaz da sociedade de consumo, cujo desenvolvimento entre nós foi acentuado, na última década, graças às situações preferenciais no comércio com as ex-colónias, ao crescimento das remessas dos emigrantes e ao surto do turismo. Suprimido que foi o primeiro destes factores, as infra-estruturas mercantis que a sociedade de consumo motivou e exige e que, aliás, asseguram ainda inúmeros postos de trabalho, poderão de momento viver, tanto quanto o permitir a importância dos outros dois factores, já que a indústria portuguesa de bens de consumo não tem, na generalidade, viabilidade fácil, por razões de limitação de mercado e porque a integração de Portugal na Europa é inevitável.

Assim, que fazer da indústria portuguesa?

Sem pretender sequer delinear modelo de configuração para a indústria neste país, indicam-se a seguir acções que parecem gozar de aceitação da grande maioria dos Portugueses. A sua temporização detalhada e seriação prioritária e ainda a correlativa definição dos mecanismos financeiros, etc., seria um esboço de tal modelo. O interesse em apenas referir as acções desarticuladas deste quadro reside naquilo que implicam quanto à Universidade a médio e longo prazos.

Sector básico: A petroquímica e indústrias químicas, os adubos, a siderurgia, etc., devem acompanhar cautelosamente o crescimento das necessidades nacionais. Mas não são concerteza as indústrias básicas que hão-de simultaneamente criar os postos de trabalho e a massa salarial necessários. De notar ainda que terão efeito mitigado sobre a correcção da balança comercial, como é óbvio, sendo desejável que, para diminuir custos sociais inúteis, atendendo ao reduzido valor acrescentado que comportam, parte do incremento da procura futura no sector, venha a ser suprida pela importação.

Sector de construção urbana e obras públicas: Desbloqueá-lo é, sem dúvida, prática a que se deve lançar mão, como recurso, principalmente no que concerne à construção urbana pois há enorme carência de fogos, é actividade com elevado efeito multiplicativo e pode quasi funcionar em vaso fechado. Já nas obras públicas, cuidados extremos devem ser tomados, pelos custos sociais exagerados a que podem arrastar e pelo endividamento que certos investimentos, necessariamente com origem em capital estrangeiro, acarretam.

Sector metalo-mecânico pesado: Sem dúvida que há que adaptá-lo ao mercado interno, com a produção de máquinas, ferramentas e similares, já que aqui também, e por alguns anos, nada leva a admitir que se possa exportar volume significativo para a Europa, muito avançada neste domínio, embora, em certa medida, se

possa fazê-lo para o Terceiro Mundo. Mas essa adaptação implica concentrações, reorganizações, etc., tudo conducente à diminuição de postos de trabalho relativamente ao que artificialmente existe hoje em dia.

Sector de construção e reparação navais: voltado para o exterior, é, portanto, da exportação de fabricos e serviços que terá de viver. Competitividade e associações de diversas modalidades com entes similares ou clientes estrangeiros será condição necessária mas não suficiente de sucesso.

Sector automóvel: É óbvio que carece de reconversão cuidadosa, levando-o a produzir integralmente motores e unidades industriais a par de uma outra montagem mais sofisticada que haverá vantagem em manter. O que necessariamente exige forte progresso na metalurgia.

Sector eléctrico e electro-mecânico: No domínio dos motores e cabos eléctricos, é de aperfeiçoar a experiência já tentada, uma vez que o mercado interno, activado com o surto da construção urbana e obras públicas será confortável para umas tantas unidades bem dimensionadas, as quais poderão ainda contar, de imediato, com mercados em países em vias de desenvolvimento na orla mediterrânea e do Terceiro Mundo. O mesmo se pode dizer quanto ao fabrico de grupos moto-bomba de dimensões pequenas ou médias.

Sector têxtil, de vestuário e calçado: É tradicional neste país. O seu ajustamento às novas condições de matérias primas, salários e mercados, exige tempo e cautelas mas importa que se comece. Pode ser que aí possamos ter forte componente exportadora.

Sector farmacêutico e de perfumes: Para os produtos farmacêuticos, não carece de extensa justificação o ponto de vista de que um importante mercado interno existe em franca expansão, ao qual se poderá adicionar mercado potencial no Terceiro Mundo. Por seu lado, os perfumes contarão com mercado externo e, atendendo ao elevado valor acrescentado que transportam, nem sequer exigem grandes volumes transaccionados para serem interessantes.

Sector alimentar: Conta com o mercado de cerca de 9 milhões de bocas longe da saturação e com níveis salariais acrescentados, o que permitirá certa sofisticação no género enlatados, lacticínios, etc. Eportações para a Europa e Terceiro Mundo são de tentar.

Sector das pescas: A pesca é essencial para a obtenção do dieta mais equilibrada num país tradicionalmente carente de carnes (veja-se o exemplo do Japão). Pode dizer-se que, entre nós, a pesca se encontra em estado embrionário, pelo que muito há a criar.

Sector das metalurgias extractivas, aços especiais e outras ligas: Será infra-estrutura importante a lançar quasi de novo para economia substancial de divisas, se se quiser suportar certas vias acima apontadas. As metalurgias extractivas deverão depender, tanto quanto possível, e até nos não ferrosos, dos recursos minerais disponíveis no território nacional.

Sector mineiro: Impõe-se a revisão muito cuidadosa da exploração das minas nacionais. As explorações de pedras ornamentais e de materiais de construção são susceptíveis de surto muito importante com a adicional vantagem de ainda serem ramos de mão-de-obra intensiva com possibilidades de mercado externo.

Sector de energia: Obviamente que tudo isto implicará disponibilidades em energia que exigirão produção acrescida, transporte e distribuição melhorados e mais intensa ligação com fontes externas.

Sector agrícola: As tentativas de reforma agrária baseando-se principalmente na lei das expropriações, aliadas a intensa e variada actuação local e confabulação política, mostraram bem que o problema é diversificado, carecendo de boa dose de reflexão política e de realismo, para que se não atinja, rapidamente e por dilatado tempo, quebra desastrosa da produtividade e desacumulação acentuada, situações estas que só poderão ser superadas com custos sociais importantes e simultâneo acréscimo do endividamento externo. De qualquer modo, a agricultura, para lá dos seus problemas específicos de reordenamento e reforma, apresenta-se como mercado potencial importante para bens de produção e alimentares. Indústrias agrícolas de diversa índole são também de incrementar com o objectivo de aumentar o valor acrescentado retido regionalmente e para que se estabeleça pleno emprego coerente e convenientemente produtivo.

2.2. — Assim, é evidente que, se não se desejar que o país mergulhe em apagada e vil miséria, haverá que lançar integradamente na indústria todo um conjunto diversificado de acções. Não poderá, como é evidente, a Universidade alhear-se (ou ser alheada) delas.

Para que tal não aconteça, importa que a Universidade seja capaz de produzir constantemente, por um lado, as sínteses apropriadas que venham a esclarecer, suportar e alterar o projecto nacional adoptado pela grande maioria dos Portugueses e, por outro, os profissionais capazes de nele colaborar eficazmente. A enumeração acima feita da diversidade das acções recomendáveis mostra bem quão vasto e profundo terá de ser o conhecimento económico e tecnológico (e não só) exigido pelo país à Universidade.

Assim, nas ciências exactas, a que directamente se ligam variadas tecnologias, a Universidade deverá produzir em proporção diversa técnicos de execução, investigadores e capacidades de planeamento e projecto.

Aos técnicos de execução (v. g. engenheiros de exploração) compete-lhes assegurar o funcionamento dos processos tecnológicos, quer tanto a qualidade, quer quanto a quantidades, e são responsáveis pelas «obras». Nestas funções, vêm-se, com frequência, compelidos a aplicar o conhecimento científico sem longos raciocínios ou prolongados cálculos. Em princípio, não projectam, não têm que inventar, nem que criar nova explicação para qualquer processo industrial. Espera-se, antes, que executem criteriosamente o projecto ou que mantenham a produção ao nível e qualidade requeridos. Devem assim ser especializados, no campo da aplicação que lhe compete, e, simultaneamente, possuir conhecimento físico-químico assaz sólido, para que, nas inúmeras vezes em que tiverem de decidir, o façam com pormenorizado conhecimento do campo onde actuam e o possam

explorar coerentemente. De notar que, certos técnicos de execução são necessários para assumirem funções de direcção de empreendimentos, tarefa que exige vasta e diversificada experiência tecnológica e de organização. O investigador, integrado na situação portuguesa actual, deve estar interessado em determinado ramo das ciências que vise principalmente a resolução de problemas específicos da comunidade. À investigação com o objectivo do progresso geral da Ciência, na conjuntura actual aqui em Portugal, deve atribuir-se segunda prioridade, quando descolada de solicitações daquele tipo. No entanto, não pode esquecer-se que o ensino universitário exige, por si próprio, a investigação, pelo que as respectivas solicitações, neste particular, devem ser incluídas entre as da comunidade.

Quanto ao projectista e ao planeador, actuando a vários níveis, detêm a responsabilidade da conceptualização (e correlativa integração política) dos projectos e também da concepção da maquinaria, das instalações e das obras. Normalmente não investigam mas servem-se dos resultados da investigação e, com frequência, promovem (ou devem promover) a investigação. São os utilizadores dos resultados do laboratório ou do «piloto» e acontece até que, por vezes, projectam para que se ensaie. A sua cultura científica, embora não tão profunda quanto a do investigador é, certamente mais vasta e largos contactos internacionais são-lhes necessários. A influência que exercem no processo industrial é notória, pelo que convirá que hajam passado pela actividade profissional ao nível da execução, e isto por muitos motivos.

3. — O DOCENTE E O ENSINO UNIVERSITÁRIO

Nesta panorâmica, como integrar a carreira docente universitária? Há, antes de mais, que procurar definir o docente universitário, na actual conjuntura.

Dir-se-á que deverá:

(i) Ser um profissional naquilo que ensina;

(ii) ser capaz de se actualizar no conhecimento, através, quer da reflexão, quer das aplicações em que a comunidade o imergiu, quer ainda da actividade investigatória que executa ou motiva e dos contactos externos que cultiva;

(iii) possuir «veia pedagógica» que se traduzirá pela comunicabilidade actuante e entusiasta aliada à simplicidade de expressão, à humildade intelectual que é predisposição para o diálogo e para o trabalho anónimo em grupo.

Por outro lado, o saber (ou se se preferir o conhecimento) produzido e reproduzido nas Universidades necessariamente que carece de um posicionamento que, de certo modo, parte de coordenadas epistemológicas anteriores às adoptadas em outros níveis de ensino. Na Universidade, exige-se o recurso directo aos processos explicativos básicos, não valendo, ou valendo cada vez menos o «tudo se passa como» que é fórmula mágica do empirismo arrogante. E é oportuno notar que é, nesta exigência, que entronca a utilidade, às vezes difusamente compreendida, das teses de doutoramento.

Mas este recuo epistemológico há que integrá-lo numa universalidade que é como que uma opção metodológica, muito embora seja a característica mais saliente do ensino universitário. Universalidade que cria a interdisciplinariedade, conferindo ao pensamento universitário a autoridade de se pressupôr visto sob todas as facetas da «intelligentzia» coeva e passada.

Claro que, contrapondo-se à universalidade, há que contar com o rigor, o qual cria o conceito de disciplina, domínio onde as operacionalidades de certa axiomática e correlativa metodologia já deram as suficientes provas de eficácia para formarem um corpo cultural.

Por tudo isto, o docente universitário não é só o técnico profissionalmente válido, nem tanto o investigador altamente especializado e, nem ainda e apenas o pedagogo; e uma vida é curta para que se atinjam os devidos níveis de recuo epistemológico, de abertura universalista e de rigor científico que a comunidade lhe deve exigir. Compreende-se, portanto, que a carreira docente universitária deverá motivar formação capaz de exigir este tipo especial de saber a par da capacidade de o pôr utilmente ao serviço da comunidade.

Além disso, as disciplinas que no seu articulado conjunto constituem qualquer curso, devem agrupar-se em dois tipos: disciplinas básicas, onde se dá ênfase à universalidade e ao recuo epistemológico, criando simultaneamente as ferramentas de trabalho e as disciplinas de aplicação, onde se desenvolvem metodologias e se promovem conhecimentos profissionais ou para-profissionais.

4. — A DEDICAÇÃO EXCLUSIVA

Pode pôr-se agora a questão, considerada em Portugal inexplicavelmente central na reestruturação da carreira docente universitária — a «dedicação exclusiva».

Entende-se por tal a situação que vincula o docente à sua escola de tal modo que lhe é interdito acumular com qualquer outra actividade (de trabalho remunerado) que não seja a investigação ou a extensão cultural, no âmbito da própria Universidade.

Notar que a figura «tempo integral» também contemplada em certos projectos, consiste na sujeição do docente universitário a horário de trabalho do funcionalismo público. A respeito de quem, como o docente universitário, tem por actividade prioritária permanente a actualização do saber, falar-se de horário de trabalho do funcionalismo leva naturalmente a contrapôr que se lhe atribua acessos por simples concurso documental, promoção por antiguidade e que, nas horas semanais que lhe forem fixadas se incluam constantemente cursos de actualização, horas de letiura, tempos de reflexão, etc.

Analizar-se-á apenas aspectos da «dedicação exclusiva».

4.1 É natural que se veja no gosto pela institucionalização da «dedicação exclusiva», antes de mais, a ma-

nifestação de uma certa frustação por parte do sub-estrato dos docentes que, por força da sua especialidade, não têm tido, mesmo que o quisessem, modo de objectivar a «dedicação parcial». Trata-se principalmente do grupo de docentes ligados às escolas ditas clássicas onde, mercê de contradição interna, a sociedade burguesa portuguesa não tem ido buscar senão quasi só a reprodução de professores, na sua maioria, do ensino médio. Daí, que nelas se haja desenhado tendência para um ciclo vicioso, o qual conduz ao empobrecimento do ensino universitário, visto que o saber que aí mais haveria que reproduzir seria o bastante para cobrir o ensino médio.

Por outro lado, reforçando aquela posição pró «dedicação exclusiva» certos partidários da «dedicação parcial» (v. g. docentes das escolas de Medicina, Direito, Economia, Engenharias, etc.) desenvolveram, muitas vezes desenfreadamente, as suas actividades extra-universitárias ao ponto de se limitarem, no dizer de Alfredo Bensaúde, a vir às escolas para «mijar a lição».

E esta prática causou e causa as mais legítimas e gerais reprovações.

Concatenando tudo isto, surge assim a «dedicação exclusiva», como medida que santifica uma situação de facto e como medicina que cura os abusos a coberto do estatuto de independência tradicional do docente universitário. E que, segundo uns, teria ainda a vantagem de forçar a saída de boa dose de docentes que «ipso facto» abririam vagas, circunstância salutar na conjuntura actual de desemprego generalizado.

Mas será que os efeitos da «dedicação exclusiva» seriam só esses? Muita gente assim pensa, certamente porque se não alongou suficientemente na análise do conjunto completo das suas consequências.

Antes de mais, referiu-se atrás que a Universidade deverá produzir profissionais e, acrescente-se, dentre eles, não só professores do ensino médio. Notou-se também que o docente, quanto mais não fosse por esta razão, necessariamente teria de ser profissional válido. Compreende-se que, em certos cursos ou algumas disciplinas básicas de outros, os professores possam atingir esse profissionalismo no âmbito estrito da Universidade. Mas o dizer-se que o trabalho investigatório que compete àquela, estando mesmo ligado à realidade da comunidade, conferirá aos seus cultores, quaisquer que eles sejam, o profissionalismo suficiente é demagogia vaga,quando aplicado a configuração capitalista ou pre-socialista. Quanto ao recurso exclusivo às leituras, não parece haver dúvidas, porque ninguém, hoje em dia, acredita seriamente no auto didatismo como método para formar profissionais e o povo até diz que no lêr-se muito há o perigo de treslêr.

Todavia, são estes mesmos pressupostos que encerra a «dedicação exclusiva», tal como se vê advogar entre nós, para ser indiscriminadamente aplicada a qualquer tipo de docente.

Em modalidade avançada de configuração socialista, a Universidade imerge-se no bloco social que aquela sustenta e, através de centros, núcleos, gabinetes, comissões, etc., onde participam os seus docentes, investigadores e alunos, é motor do desenvolvimento, isto é, avança as conceptualizações, cria as sínteses que explicam orientam e corrigem o processo e, simultaneamente, constrói-o no detalhe da prática em colaboração com o resto do país. Não há sequer que falar em «dedicação exclusiva» senão como figura para ironizar o comportamento de algum que se alheie na torre de marfim de cubículo intelectual exclusivo.

Nas configurações pre-socialistas ou no capitalismo, a par dos órgãos estatais conceptualizantes, coexistem os institutos, centros, gabinetes, etc., privados ou semi-públicos por onde passa boa parte da construção do processo de desenvolvimento. Do que se referiu atrás, conclui-se que a inserção nesses entes dos docentes responsáveis por certas disciplinas das aplicações é prática que não só se deve permitir como até fomentar devidamente regulamentada como é óbvio e costume em países que a usam utilmente.

Parece, pois, oportuno que se avancem algumas permissas neste particular:

(i) Motivada pela escola ou/e solicitada, a colaboração do docente com entes públicos semi-públicos ou privados, tanto periodica como aperiodica será sempre passiva de apreciação por órgão competente daquela e decidida conforme com estatuto apropriado;

(ii) tal estatuto contemplará apenas os casos em que a actividade extra-universitária diga respeito à matéria ligada ao domínio da docência do interessado e fixará a ocupação naquela actividade, podendo, por esse motivo, impedir o exercício da investigação;

(iii) o docente prestando serviço fora da Universidade não será afectado no seu vencimento base; todavia, ficará, em geral, impedido de exercer funções gestionárias na Universidade, excepto se a ocupação naquela actividade corresponder a tempo inferior a certo mínimo;

(iv) do vencimento percebido pelo docente, em serviço extra-universitário, uma fracção será retida pelo departamento onde aquele presta trabalho, como contrapartida dos custos sociais e gastos gerais suportados pela Universidade.

4.2. — Mas outro aspecto existe na prática da «dedicação exclusiva». É o que relaciona a docência com a investigação.

Parece haver quem encare , ao menos, duas saídas, uma vez posta a funcionar a «dedicação exclusiva»:

(i) Docente em «dedicação exclusiva», exercendo só docência;

(ii) docente em «dedicação exclusiva» partilhada por docência e investigação na Universidade;

Embora se não diga se a opção é do foro do próprio docente ou compete à escola ou a qualquer outro ente dirimir.

Em qualquer caso, acrescenta-se, com frequência, que ambas as alternativas conferem o mesmo vencimento e que nunca os réditos que porventura o departamento venha a auferir, os subsídios que haja que merecer, consequência da investigação, serão partilhados pelo docente investigador. Este (e, consequentemente, o seu par só docente) deverá ser tão liberalmente pago que o acto de investigar represente a manifestação de uma natural propenção, um desfastio, um «hobby» gratuito, que até poderá interromper-se um pouco a belo prazer, trocando-o, conforme as circunstâncias, por mais prolongado tempo de aulas e/ou actividades administrativas ou gestionárias. E, note-se, atinge-se este contrasenso porque se reconhece que os docentes estão actualmente mal pagos, não devendo os réditos, bolsas, subsídios, etc. que o trabalho investigatório proporcione, figurar como complemento dos vencimentos básicos, o que é crítica válida. Mas então, o que tem de se defender, será o devido ajustamento dos vencimentos e atribuir subsídios de investigação, tal como os há, incontroversamente, para funções administrativas e de gestão.

Aliás, se assim se não fizer, como articular a situação do docente investigador com a do investigador «tout-court»? Este perceberá vencimentos em pagamento do trabalho investigatório que nada impede, aliás, que até seja superior ao de certos estratos de docência. O docente, que como tal terá necessariamente um mínimo de ocupação não dispiciendo na docência, ao acumular com a investigação, têla-á que executar gratuitamente?

Que não se venha argumentar que tal docente estará apenas obrigado a um mínimo do tempo de aulas, porque essa lógica de considerar como actividade docente apenas a presença nas aulas significa, implicitamente, a defesa inconsciente das situações abusivas do trabalho extra-universitário que, com razão, tanto se verbera. Em contra-partida, como se justifica que o docente não investigador perceba o mesmo do que o docente investigador? Obrigando-o a permanência prolongada nas aulas, sobrecarregando-o com cursos, para lá do razoável, que é limite cautelar contra a imbecilização enciclopedista! Eis mais uma funesta consequência da «dedicação exclusiva».

Vem pois a propósito notar que, a justa remuneração pelo trabalho investigatório até deve ser mais lata e provir de parte das receitas que resultem de serviços dessa índole prestados a entes públicos (1), semi-públicos (1) ou privados.

5. — NATUREZA DOS CURSOS UNIVERSITÁRIOS

Importa também que alguma coisa se concretize sobre a natureza dos cursos universitários. Referiu-se que o ensino nas Universidades se caracterizava pelo recuo epistemológico, a universalidade e o rigor e deveria conferir formação profissional. Sucintamente, no ensino médio conducente a formação profissional, a ênfase é posta no rigor e, no ensino superior, no recuo e no rigor. E qualquer país, qualquer que seja a etape do seu desenvolvimento e a configuração social onde evolui, destes três géneros de ensino precisa. Todos detêm a mesma qualidade social.

Hierarquitá-los socialmente foi e tem sido pecha visível nos sistemas capitalista e socialista, resquício (ainda em muitos locais dolorosamente presente) da discriminação do trabalho manual «versus» trabalho intelectual, que na sociedade industrial avançada, como se sabe, perdeu muito do seu outrora dramático significado, a ponto de se andar, por vezes, à procura do como delimitar o proletariado.

Assim sendo, o entendimento dos graus de ensino universitário, nas ciências exactas, esclarece-se com a verificação de que fundamentalmente devem existir:

(i) Um primeiro grau (bacharelato ou maestrado; possível em certos cursos) cujo objectivo é formar os técnicos de execução (incluindo neste os professores do ensino médio). Este grau corresponderá ao obtido nos institutos profissionais de ensino superior não universitário;

(ii) um segundo grau (licenciatura), cujo objectivo é formar investigadores, planeadores e projectistas. Trata-se do grau que profissionalmente melhor cristaliza o saber universitário;

(iii) um terceiro grau (doutoramento), cujo objectivo é formar docentes universitários. É o grau que garante a reprodução do ensino universitário com as características que lhe são específicas e que atrás se apontaram.

Querer limitar o ensino universitário ao primeiro grau é desviá-lo da sua função socio-política permitindo que a Universidade seja colonizada pelo poder autocrático do Estado, sem se ter sequer garantia de que tal colonização seja exclusivamente nacional. E é redundante acrescentar que ao colonizar a Universidade, o mesmo se faz ao país.

Mas, por outro lado, enfaticamente exigir que na Universidade todos os cursos confiram apenas a licenciatura pode significar arrogância intelectualista, concerteza descolada das necessidades da comunidade, principalmente se não existirem os institutos superiores bastantes.

É evidente que as articulações entre estes três graus não serão difíceis de estabelecer. Aliás, existem experiências válidas em Portugal neste particular, que sistematizadas por regras conhecidas ou praticadas noutros países ou ainda decorrentes do simples bom senso, poderão conduzir a construção coerente com fortes probalidades de merecer aceitação geral.

6. — AUTONOMIA DAS UNIVERSIDADES

Finalmente, referir-se-á ainda o aspecto da autonomia das Universidades.

(1) A ideia que parece tender a generalizar-se de que os serviços ministeriais podem gratuitamente servir-se da Universidade, constitui prática que não contabiliza correctamente os custos sociais.

Antes de mais, é conveniente lembrar que as Universidades existem, anteriormente ao ascenço da burguesia; que o estado burguês cedo compreendeu a hegeliana associação Saber-Poder; que esta tendência se consolidou no capitalismo de estado; que são disso manifestação os poderes cada vez mais centralizadores dos ministérios de educação ou instrução ou ainda de investigação científica; que, em Portugal, a criação de escolas independentes da universidade bonapartista, durante a 1.ª República, representa a mais recente tentativa de libertação dos estudos universitários do poder de estado; que o regime salazarista, com sucessivas «reformas» do ensino universitário e outros meios também eficazes, o colocou outra vez sob aquele jugo, a ponto de estar em vias de produzir a mais hegeliana reestruturação, durante o ministério Veiga Simão; que de 25 de Abril de 1974 para cá, esta tendência não abrandou, do que é prova o decreto de gestão das Universidades, etc. etc.

Reconduzir a Universidade à sua situação de autonomia, o que é primordial para o funcionamento da Democracia, implica aceitar os seguintes princípios ou outros equivalentes:

(i) Compete às escolas gerir, de acordo com normas universais, os fundos que à sua disposição são postos pelo país, em consequência da acumulação realizada por todos os Portugueses. O Governo não deve figurar senão como mediador nesta apropriação transferida de mais valia;

(ii) compete à reunião dos conselhos das escolas, órgãos máximos das Universidades, decidir sobre a atribuição dos fundos a cada Universidade e, dentro de cada uma delas, a cada escola;

(iii) o estatuto dos docentes universitários é específico e compete às escolas a contratação daqueles;

(iv) os conselhos das escolas decidem sobre a prática da aplicação dos fundos, quer na docência, quer na investigação;

(v) o órgão coordenador da investigação científica a nível nacional é gerido por um conselho incluindo representantes do Estado, das Escolas e de associações laborais e/ou profissionais;

(vi) os sistemas de avaliação de conhecimento são definidos pelas escolas. As equivalências entre cursos de escolas distintas são estabelecidas ao nível da reunião dos conselhos das escolas;

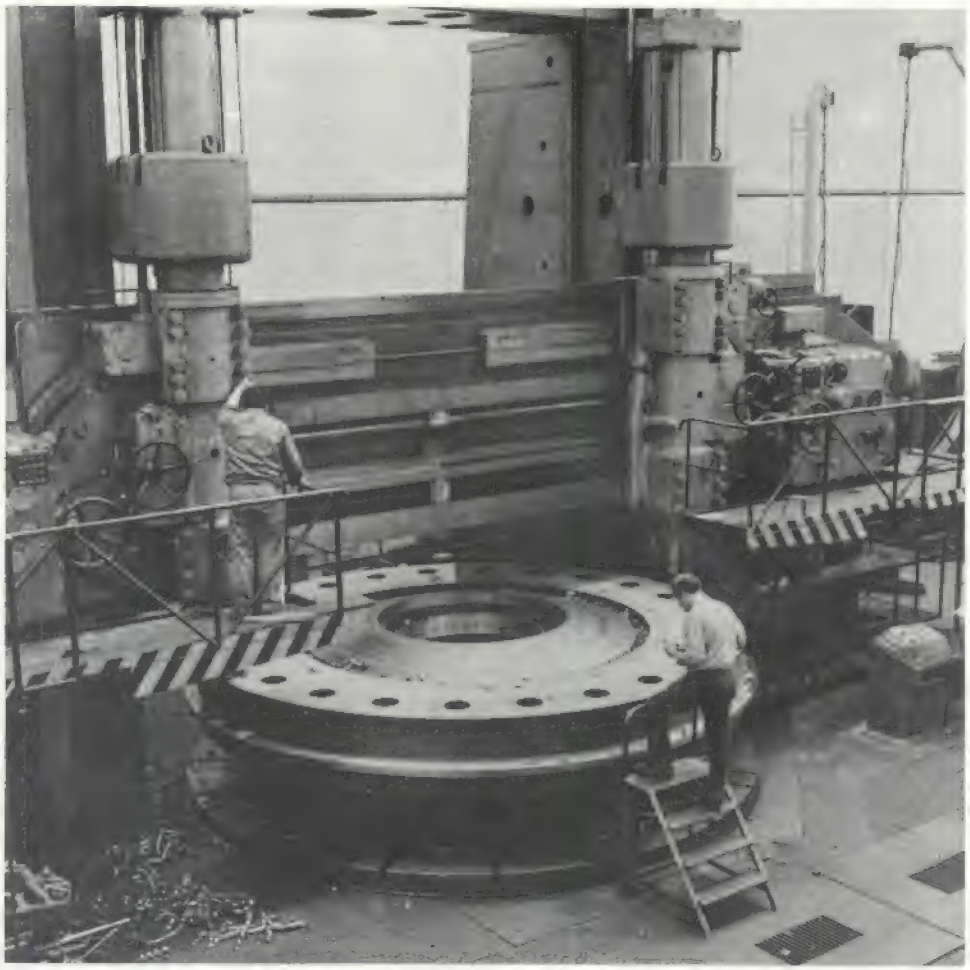
(vii) nos conselhos das escolas têm assento, além de docentes e discentes, e representante do Governo, representantes de sindicatos, associações profissionais, autarquias locais.

Parece evidente que, enquanto regras como estas não vierem a ser aceites e impostas pela maioria dos Portugueses, pretender reestruturar a carreira docente universitária para servir o Estado constitui forma de ocultar a oposição dialética fundamental entre Saber e Poder.

Feiras, Conferências, Exposições e Congressos

OBJECTIVOS E PROGRAMA	LOCAL, DATA, ORGANIZAÇÕES E INFORMAÇÕES
III Conference ON ELECTRODE PHENOMENA IN GAS DISCHARGES	Lisboa Maio - 76
V Simpósio Iberoamericano de Catálise	Lisboa 25 a 30 de Julho - 76 Fundação Gulbenkian
Geral	Poznan — Polónia 6 a 17 de Junho - 76

MAGUE



«Maquinagem do anel superior do distribuidor de 1 das 2 turbinas Francis de 86.500 CV para a Central de Humaya, no México».

PONTES ROLANTES, GUINDASTES E APAR. DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS	*Projecto e fabrico*
TURBINAS HIDRÁULICAS	*Fabrico segundo licença de A. C. M. de Vevey, S. A.*
TURBINAS A VAPOR	*Fabrico segundo licença de Brown Boveri, Cie.*
CALDEIRAS A VAPOR	*Projecto e fabrico segundo licença de Foster Wheeler, Co.*
EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS	

CONSTRUÇÕES METALOMECANICAS **MAGUE** S.A.R.L

ALVERCA DO RIBATEJO — PORTUGAL

DESPOEIRAGEM

FILTROS TECIDOS EM PEÇAS, PANOS, SACOS, MANGAS

DE QUALQUER FIBRA NATURAL OU SINTÉTICA

FANAFEL

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS
SOCIEDADE LIMITADA

APART.: 9
TELEF.: 52091 PBX
TELEG.: FELTROS

OVAR
PORTUGAL

ESCRITÓRIO E FÁBRICA
ESTRADA DE S. JOÃO

PRÉ-FABRICAÇÃO
em betão

MOITA

EDIFÍCIOS ESCOLARES
HABITAÇÃO SOCIAL
ESCRITÓRIOS
FÁBRICAS
MORADIAS
ETC.

materiais novobra

Fábricas em: Lisboa, Leiria, Lagoa, Guarda, Moita, Luanda e Lourenço Marques
Stands de exposição em: Aveiro, Évora e Faro
Sede: Av. Est. Unidos da América, 100, 5.º - Dto. - Lisboa 5
Telefones - Serviços Administrativos: 77 48 32 - 77 29 53 · Telex: 18375 Novoba P
Serviços Técnicos: 71 41 16/7/8 - 71 93 31/2

CONSTRUA COM CONFIANÇA - CONSULTE-NOS

TABELAS PARA O CÁLCULO DE BETÃO ARMADO

por

Brazão Farinha e Mexia Heitor

Preço 250$00
Desconto de 10% aos assinantes

PEDIDOS À

técnica

C. D. U. 624.074

Cálculo de estruturas reticuladas no espaço

Analysis of space frames

J. S. BRAZÃO FARINHA

(CONTINUAÇÃO)

O momento de distribuição a aplicar na barra i-j, na 1.ª etapa será dado por $M_{i-j,1} = K_{i-h,1}\,\theta_{yi}\cos\alpha_{i-h,1}$ de acordo com 2), donde

$$M^{r}_{ij,1} = -324 \times \frac{1.200}{549} = -710 \text{ kgm}$$

uma vez que $\cos\alpha_{i-j,1} = -1$. Ver fig. 9, e quadro 6.

Para a 2.ª etapa temos no nó i apenas $M_y = 0{,}24 \times \times EI\Delta$, e virá, de acordo com 3')

$$\theta_{yi} = -\frac{0{,}24EI\,\Delta}{900}$$

donde, no vértice i da barra h-i

$$M^{r}_{i-h,1} = -900 \times \frac{0{,}24}{900}\,EI\Delta = -0{,}24\,EI\Delta$$

transmitindo metade deste valor para o nó h.

Afim de determinar o valor de Δ há que estabelecer a equação de equilíbrio $\Sigma V = 0$ no nó i

$$T_{i-j} = \frac{144 \times 10}{2} = 720 \text{ kg}$$

$$T_{h-i} = \frac{1.000 \times 5{,}0}{2} - \frac{312{,}4}{5{,}0} = 187{,}5 \text{ kgm}$$

$$T'_{h-i} = -\frac{0{,}12\,EI\Delta}{5{,}0} = -0{,}024\,EI\Delta$$

Temos portanto a equação

$$0{,}024\,EI\Delta = 720 + 187{,}5; \quad EI\Delta = 37.800$$

donde se deduz (sinais de Cross)

$$M_{f_{h-i}} = 312{,}4 + 37.800 \times 0{,}12 = 4.850 \text{ kgm}$$

$$M_{f_{h-i}} = M_{t_{i-j}} = M_{t_{i-j}} = 0$$

$$M_{t_{h-i}} = M_{t_{i-h}} = -490 \text{ kgm}$$

Quadro 6 — Transmissão de momentos (2.º exemplo)

Nós	h			i					
Barras	h-i			i-h			i-j		
Eixos	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1.ª etapa	+208,3	—	—	+208,3	—	—	+1.200		
	−104,1	—	490	−208,3	—	−490	− 710		
	+312,4	0	490	0	0	490	+ 490	0	0
2.ª etapa (xEIΔ)	+0,24	—	—	−0,24	—	—	—	—	—
	−0,12	—	—	+0,24	—	—	—	—	—
	+0,12	0	0	0	0	0	0	0	0

Na fig. 10 indicam-se os diagramas dos momentos, para convenção corrente de sinais. O momento a meio vão da barra i-j é

$$\frac{144 \times 10^2}{8} - 490 = 1.310 \text{ kgm}$$

Se tivessemos escolhido o sistema de eixos indicados na fig. 11 em planta, (eixo z perpendicular ao plano do papel e dirigido para cima), teriamos o quadro 7.

O sistema característico do nó i, relativo à 1.ª etapa, neste caso é:

$$724{,}5\,\theta_x - 175{,}5\,\theta_y = 701{,}3 \qquad \theta_x = 1{,}382$$

$$-175{,}5\,\theta_x + 724{,}5\,\theta_y = 995{,}7 \qquad \theta_y = 1{,}709$$

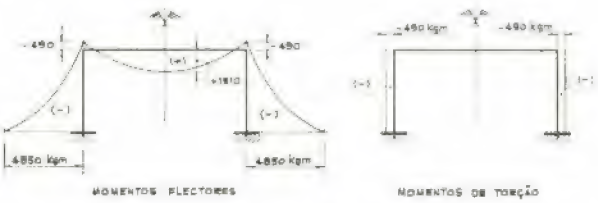


Fig. 10 — Diagramas dos momentos flectores e de torção relativos à estrutura do 2.º exemplo

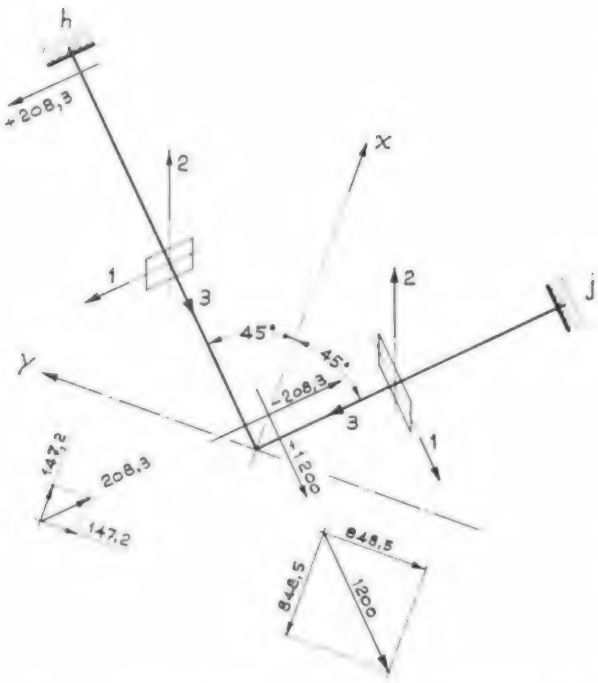


Fig. 11 — Eixos de referência para a 2.ª modalidade de resolução do 2.º exemplo

Os momentos de distribuição a aplicar na barra h-i (vértice i), serão, como no cálculo anterior.

$M^r_{i-h} = 900\ (1{,}709-1382)\ 0{,}7071 = 208{,}1$ kgm

$M^r_{i-h} = -225\ (1{,}382+1{,}709)\ 0{,}7071 = -492$ kgm

e na barra i-j

$M^r_{i-j,1} = -324\ (1{,}709+1{,}382)\ 0{,}7071 = -708$ kgm

O sistema característico do nó i, relativo à 2.ª etapa será:

$$\begin{cases} 724{,}5\ \theta_x - 175{,}5\ \theta_y = 0{,}17\ EI\Delta \\ -175{,}5\ \theta_x + 724{,}5\ \theta_y = 0{,}17\ EI\Delta \end{cases}$$

$\theta_x = -0{,}000189\ EI\Delta;\quad \theta_y = -0{,}000189\ EI\Delta$

e vem, de modo análogo,

$M^r_{i-h,1} = -900\ (2\times 0{,}000189)\ 0{,}7071\ EI\Delta = -0{,}24\ EI\Delta$

Finalmente, apresentamos a resolução deste mesmo problema através do preenchimento do quadro 8, que permite sistematisar os cálculos de modo semelhante ao que correntemente se pratica na análise das estruturas planas. Com efeito, no caso de estruturas de barras perpendiculares entre si, aparecem no cálculo

Quadro 7 — Valores característicos do nó i (2.º exemplo). Eixos de referência

Barras		i-h			i-j			Σ
Eixos		1	2	3	1	2	3	
cos α		—0,7071	0,0000	—0,7071	−0,7071	0,0000	—0,7071	—
cos β		0,7071	0,0000	—0,7071	−0,7071	0,0000	+0,7071	—
cos γ		0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	+1,0000	0,0000	—
K		900	2.500	225	324	1.866	0	—
K cos α cos β		—450	0	112,5	162	0	0	−175,5
K cos² α		450	0	112,5	162	0	0	724,5
K cos² β		450	0	112,5	162	0	0	724,5
K cos² γ		0	2500	0	0	1866	0	4.366
1.ª etapa	M_x	208,3×0,7071 = 147,2			−1.200×0,7071=−848,5			−701,3
	M_y	−208,3×0,7071 = −147,2			−1.200×0,7071=−848,5			−995,7
2.ª etapa	M_x	−0,24 EI×0,7071=−0,17 EI Δ			—			−0,17EIΔ
	M_y	0,24 EI×0,7071=0,17 EI Δ			—			0,17EIΔ

dos valores de M^r, como factores, os coeficientes de distribuição, iguais em cada nó, às relações entre as rigidezes das diversas barras e a soma de todas as rigidezes das barras que concorrem no referido nó.

Reportando-nos à fig. 9, para a distribuição de momentos de flexão M_x em i-j os coeficientes de distribuição tem por valor

$$\frac{K_{i\text{-}j,1}}{K_{i\text{-}j,1} + K_{i\text{-}h,3}} = \frac{324E}{324E+225E} = = 0{,}590$$

$$\frac{K_{i\text{-}h,3}}{K_{i\text{-}j,1} + K_{i\text{-}h,1}} = \frac{225E}{324E + 225E} = 0{,}410$$

e para a distribuição de momentos de flexão M_x em i-h (nas duas fases)

$$\frac{M_{i\text{-}h,1}}{M_{i\text{-}h,1} + h_{i\text{-}j,3}} = \frac{900E}{900E} = 1{,}000$$

Exemplo 3.º — Determinar os momentos actuantes nos nós da estrutura representada na fig. 12, sendo todas as barras de aço G=0,4E de secção tubular constante, donde J = 2I,GJ = 0,8EI. Supor l = 10m. Trata-se de uma estrutura sem possibilidade de deslocamentos laterais, que se resolve numa única etapa.

Os momentos flectores de encastramento perfeito são:

na barra h-i

$$M^e = \pm \frac{2Fl}{8} = \pm \frac{2\times1200\times10}{8} = 3.000 \text{ kgm}$$

e na barra i-k

$$M^e = \pm \frac{gl^2}{12} = \frac{120\times10^2}{2} = 1.000 \text{ kgm}$$

Estes momentos têm a direcção indicada na fig. 12, sendo os sinais os da convenção de Cross. Para o nó i temos

Quadro 8 — Distribuição e transmissão de momentos (2.º exemplo)

Nós		h			i					
Barras		h-i			i-h			i-j		
Eixos		1	2	3	1	2	3	1	2	3
Coef. distrib.							0,410	0,590		
M_x								+1200		
Momentos	distrib.						−490	− 710		
	transm.			+490						
Coef. distrib.					1,000					
M_x		+208,3			−208,3					
Momentos	distrib.				+208,3					
	transm.	+104,1								
Coef. distrib.					1,000					
M_x		+ 0,24 EIΔ			+ 0,24 EIΔ					
Momentos	distrib.				+ 0,24 EIΔ					
	transm.	− 0,12 EIΔ								
Momentos finais		312,4+ +0,12EIΔ		+490	0		− 490	+ 490		

$$\begin{cases} M_x = +1.000 \text{ kgm} \\ M_x = -3.000 \text{ kgm} \end{cases}$$

e podemos construir o quadro 9 com os valores dos cosenos dos ângulos que fazem os eixos 1, 2 e 3 das direcções principais das secções das barras h-i; i-j; i-k que concorrem no nó i, respectivamente com os eixos de referência x, y, z. Desse quadro tiramos, dentro do processo de cálculo anteriormente exposto, de acordo com 3'),

$$\theta_x = -\frac{+1.000\ l}{8{,}4\ EI} \qquad \theta_y = \frac{+3.000\ l}{6{,}8\ EI} \qquad \theta_z = 0$$

Os momentos que equilibram os momentos de encastramento perfeito que é necessário aplicar no nó i, serão, de acordo com 2: na barra i-h

$$M^r_{i-h,1} = \frac{4\ EI}{2\ l}\left(-\frac{1.000\ l}{8{,}4\ EI}\times 0 + \frac{3.000\ l}{6{,}8\ EI}\times 1{,}0+0\right) =$$

$$= +882 \text{ kgm}$$

$$M^r_{i-h,2} = \frac{4\ EI}{2\ l}\left(-\frac{1.000\ l}{8{,}4\ EI}\times 0 + \frac{3\ 000\ l}{6{,}8\ EI}\times 0{,}0+0\right) = 0$$

$$M^r_{i-h,3} = \frac{0{,}8\ EI}{2\ l}\left(-\frac{1.000\ l}{8{,}4\ EI}\times 1 + \frac{3.000\ l}{6{,}8\ EI}\times 0{,}0+0\right) =$$

$$= -48 \text{ kgm}$$

Quadro 9 — Valores característicos do nó i (3.º exemplo)

Barras	i — h			i — j			i — k			Σ
Eixos	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
cos α	0	0	1	1	0	0	−1	0	0	
cos β	1	0	0	0	1	0	0	0	−1	
cos γ	0	1	0	0	0	1	0	−1	0	
Rigidez K	$\frac{4\ EI}{2\ l}$	$\frac{4\ EI}{2\ l}$	$\frac{0{,}8\ EI}{2\ l}$	$\frac{4\ EI}{l}$	$\frac{4\ EI}{l}$	$\frac{0{,}8\ EI}{l}$	$\frac{4\ EI}{l}$	$\frac{4\ EI}{l}$	$\frac{0{,}8\ EI}{l}$	
K $\cos^2 \alpha$	0	0	$\frac{0{,}8\ EI}{2\ l}$	$\frac{4\ EI}{l}$	0	0	$\frac{4\ EI}{l}$	0	0	$\frac{0{,}8\ EI}{l}$
K $\cos^2 \beta$	$\frac{4\ EI}{2\ l}$	0	0	0	$\frac{4\ EI}{l}$	0	0	$\frac{4\ EI}{l}$	0	$\frac{6{,}8\ EI}{l}$
K $\cos^2 \gamma$	0	$\frac{4\ EI}{l}$	0	0	0	$\frac{0{,}8\ EI}{l}$	0	$\frac{4\ EI}{l}$	0	$\frac{6{,}8\ EI}{l}$
M_x	0			0			+1.000			—
M_x	−3.000			0			0			—

Quadro 10 — Transmissão de momentos (3.º exemplo)

Nós		h			i									j			k		
Barras		h — i			i — h			i — k			i — j			j — i			k — i		
Eixos		1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	3	3	1	2	2
Momentos	Me	+3.000	—	—	−3.000	—	—	+1.000	—	—	—	—	—	—	—	—	−1.000	—	—
	distr. e transm.	+441	—	+48	+882	—	−48	−476	—	+353	−476	+1.764	0	−238	+882	—	−238	—	−353
	Finais	+3.441	0	+48	−2.118	0	−48	+524	0	+353	−476	+1.764	0	−238	+882	0	−1.238	0	−353

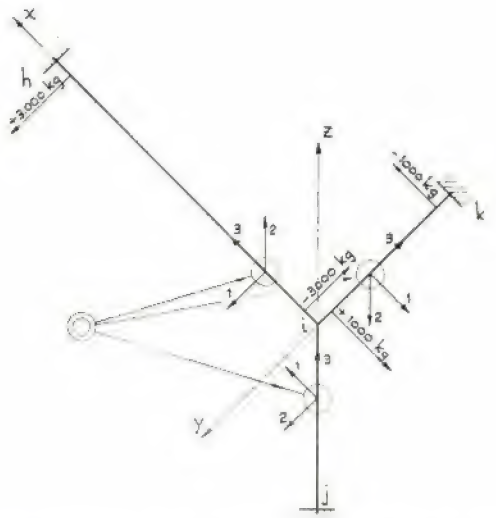


Fig. 12 — Estrutura do 3.º exemplo, e momentos de encastamento perfeito

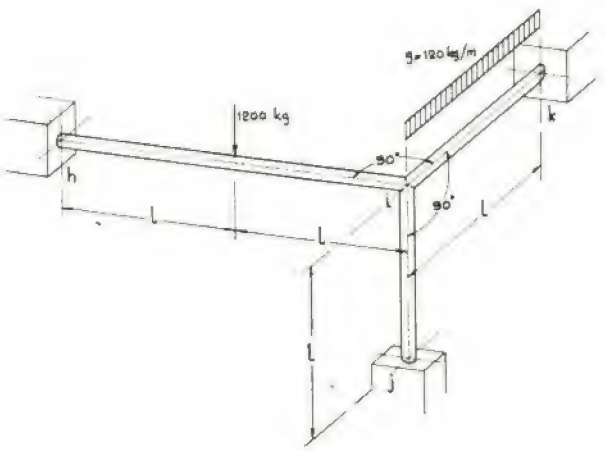


Fig. 13 — Sistema de eixos de referência da estrutura correspondente ao 3.º exemplo, e momentos finais

Estes valores são inscritos no quadro 10 nas colunas correspondentes à barra i — h (nó i) e transmite-se metade do valor $M_{i-h,1}$ para a coluna $M_{h-i,1}$. O valor $M_{i-h,3}$ com o sinal trocado, por se tratar de um momento de torção, transmite-se para a coluna $M_{h-i,3}$. Na barra i — j

$$M^r_{i-j,1} = \frac{4\,EI}{l}\left(-\frac{1.000\,l}{8,4\,EI}\times 1,00 + \frac{3.000\,l}{6,8\,EI}\times 0\right) =$$

$$= -476 \text{ kgm}$$

$$M^r_{i-j,2} = \frac{4\,EI}{l}\left(-\frac{1.000\,l}{8,4\,EI}\times 0 + \frac{3.000\,l}{6,8\,EI}\times 1\right) =$$

$$= +1.764 \text{ kgm}$$

$$M^r_{i-j,3} = \frac{0,8\,EI}{l}\left(-\frac{1.000\,l}{8,4\,EI}\times 0 + \frac{3.000\,l}{6,8\,EI}\times 0\right) = 0$$

Estes valores são inscritos no quadro 10 nas colunas correspondentes à barra i — j (nó i) e transmite-se para o nó j (respectivamente $M_{j-i,1}$ e $M_{j-i,2}$) metade destes momentos de flexão.

Na barra i — k

$$M^r_{i-k,1} = \frac{4\,EI}{l}\left(-\frac{1.000\,l}{8,4\,EI}\times 1,00 + \frac{3.000\,l}{6,8\,EI}\times 0\right) =$$

$$= -476 \text{ kgm}$$

$$M^r_{i-k,2} = \frac{4\,EI}{l}\left(-\frac{1.000\,l}{8,4\,EI}\times 0 + \frac{3.000\,l}{6,8\,EI}\times 0\right) = 0$$

$$M^r_{i-k,3} = \frac{0,8\,EI}{l}\left(-\frac{1.000\,l}{8,4\,EI}\times 0 + \frac{3.000\,l}{6,8\,EI}\times 1\right) =$$

$$= +353 \text{ kgm}$$

O momento de flexão $M_{i-k,1}$ transmite metade do seu valor para o nó k e o momento de torção $M_{i-k,3}$ transmite-se para este nó. Os resultados obtidos constam das figs. 13 e 14, nesta última sob a forma de diagramas. Concluímos que as barras h — i e i — k são solicitadas à flexão + torção e a barra i — j a dupla flexão.

Em vez do procedimento anterior podemos, como já se fez em relação ao exemplo 2.º, fazer os cálculos através do preenchimento do quadro 11.

Os momentos máximos nos vãos e as reacções de apoio são, respectivamente,

$$\text{barra i-h, } V_h = \frac{1200}{2} + \frac{3441-2118}{20} = 666 \text{ kg}$$

$$V_i = \frac{1200}{2} - \frac{3441-2118}{20} = 534 \text{ kg}$$

$$\text{Max } M = 666\times 10 - 3441 = 3219 \text{ kgm}$$

$$H_h = \frac{1764+882}{10} = 265 \text{ kg}$$

$$\text{barra i-k } V_i = \frac{1200\times 10}{2} - \frac{1238-524}{10} = 5929 \text{ kg}$$

$$V_k = \frac{1200\times 10}{2} + \frac{1328-524}{10} = 6071$$

$$\text{Max M para x} = \frac{V_i}{g} = \frac{5929}{1200} = 4,94 \text{ m}$$

$$M_{max} = 5929\times 4,94 - \frac{1200\times 4,94}{2} - 524 = 14123 \text{ kgm}$$

$$H_k = \frac{476 + 238}{10} = 71 \text{ kg}$$

barra i - j, reacção vertical $V_j = V_i + V'_i = 6463$ kg

impulsos no plano h - i - j, $H_j = 265$ kg

» » » i - j - k, $H_j = 71$ kg

Exemplo 4.º — Determinar os momentos actuantes nos nós da estrutura simétrica da fig. 15, tendo as barras as secções, os comprimentos e as rigidezes indicadas nessa fig. e no quadro 12.

O problema é resolvido em 5 etapas, para efeitos de aplicação do indicado na fig. 5.

1.ª etapa carga simétrica g=500 kg/m em i - j e em j - i'. Nesta hipótese considera-se a estrutura encastrada em j como se a barra j - k não existisse.

Momento de encastramento perfeito

$$M_x = \frac{500 \times 6{,}0^2}{12} = 1500 \text{ kgm}$$

Nesta etapa não há momentos a distribuir, e o esforço transverso em j é

$$T_{j_1} = 2 \times \frac{500 \times 6{,}0}{2} = 3000 \text{ kg}$$

2.ª etapa, carga anti-simétrica de 500 kg/m de sinal contrário em i - j e em j - i'. Pode-se considerar

Quadro 11 — Distribuição e transmissão de momentos (3.º exemplo)

Nós		h			i									j			k		
Barras		h — i			i — h			i — k			i — j			j — i			k — i		
Eixos		1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Coef. distr.							0,048	0,476			0,476								
Mx		—	—	—	—	—	—	+1000	—	—	—	—	—	—	—	—	−1000	—	—
Moment.	distr.						−48	−476			−476								
	transm.			+48										−238			−238		
Coef. distr.					0,294					0,118		0,588							
My		+3000	—	—	−3000	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Moment.	distr.			—	+882					+354		+1764	—						
	transm.	+441		—											+882				−354
Mom. finais		+3441	—	+48	−2118	—	−48	+524	—	+354	−476	+1764	—	−238	+882	—	−1238	—	−354

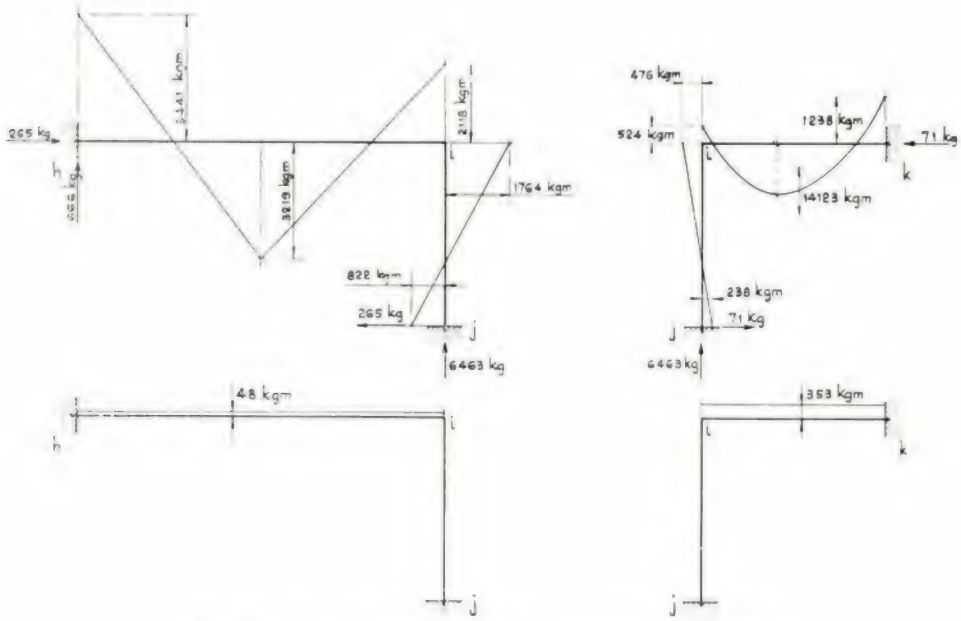


Fig. 14 — Diagramas de momentos correspondentes à estrutura do 3.º exemplo

metade da estrutura, sendo a barra j - k cortada ao meio, no sentido longitudinal, com rigidez à torção virtual igual a metade do valor normal. Depois de feita a distribuição os momentos de torção aplicados na barra j - k são multiplicados por 2.

O esforço transverso em j nesta etapa é nulo.

$$T_2 = 0$$

3.ª etapa carga simétrica na barra j - k considera-se metade da estrutura como na etapa anterior, e rigidez virtual à flexão também metade do valor real.

Momento de encastramento perfeito

$$M_x = \frac{1600 \times 10{,}0}{8} = 2000 \text{ kgm}$$

Esforço transverso em j,

$$T_{j5} = \frac{2}{3200} - 2 \times \frac{10}{2807 - 386} = 1116 \text{ kg}$$

4.ª etapa, carga simétrica correspondente a momentos de flexão em j - i e j - i' correspondentes ao deslocamento Δ do apoio j na vertical.

$$M_x = \frac{6 \text{ EI } \Delta}{l^2} = \frac{6 \text{ EI } \Delta}{600^2} = \frac{\text{EI } \Delta}{60000} = 1000 \text{ x}$$

A situação é semelhante à 1.ª etapa, sendo o esforço transverso em j

$$T_{j4} = -2 \frac{(1000 + 1000) \times}{6} = -666{,}7 \text{ x}$$

5.ª etapa, carga simétrica do mesmo tipo da 4.ª etapa correspondente a metade dos momentos de flexão na barra j - k

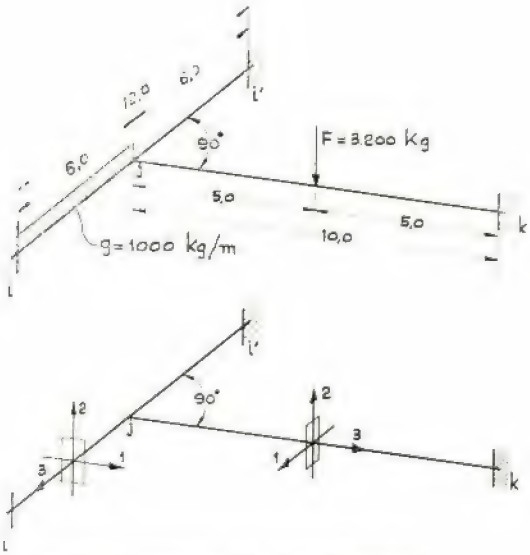


Fig. 15 — Solicitações e sentidos positivos
Estrutura do 4.º exemplo

$$M_x = \frac{3 \text{ EI } \Delta}{1000^2} = \frac{3 \text{ EI } \Delta}{1000000} = 180 \text{ x}$$

$$T_{j5} = -2 \times \frac{107 + 35}{10} \text{ x} = -28{,}4 \text{ x}$$

Equação de equilíbrio

$$3000 + 1116 = (666{,}6 + 28{,}4) \text{ x}; \text{ x} = 5{,}92$$

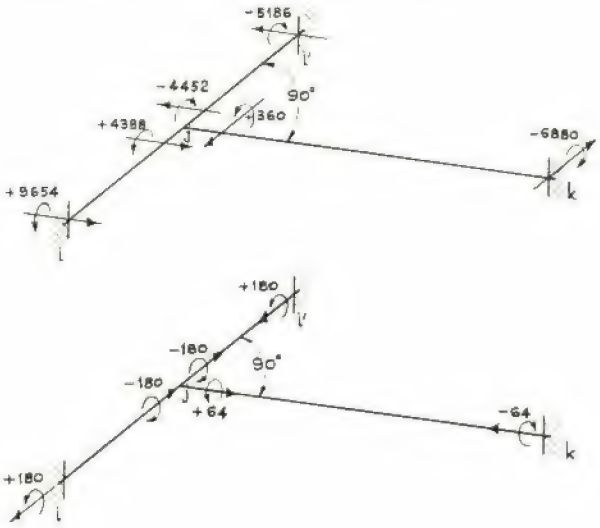


Fig. 16 — Momentos finais (4.º exemplo), sinais de Cross

4 — *Exemplos de aplicação no caso de estruturas de barras obliquas entre si*

Este problema resolve-se conforme o anteriormente exposto só que a determinação de θ não dispensa a resolução de um sistema de equações, de cada vez que se distribuem os momentos desiquilibrados em cada nó.

Exemplo 5.º — Viga contínua de dois tramos, de secção constante, sujeita a carga uniformemente distribuída de 1000 kg/m no 1.º tramo e a uma carga concentrada de 4570 kg no 2.º tramo, conforme fig. 17, e para a qual GJ = 4 EI

Momentos de encastramento perfeito

no elemento h — i, $\frac{1000 \times 4{,}25^2}{12} = 1500$ kgm

» » i — j $\frac{4570 \times 2{,}25 \times 3{,}15^2}{5{,}4^2} = 3500$

$\frac{4570 \times 2{,}25^2 \times 3{,}15}{5{,}4^2} = 2500$

Trata-se de uma estrutura cujo nó i está sujeito apenas a rotação, pelo que o problema é resolvido numa

Quadro 12 — Rigidezes das barras da estrutura do 4.º exemplo

Barras	Compr. (m)	Secção (cm×cm)	Momentos de inércia (cm 4)			Rigidezes × E		
			I_1	I_2	I_3	K_1	K_2	K_3
i — j	6,0	30×60	540000	135000	371000	3600	900	257,6
j — i	6,0	30×60	540000	135000	371000	3600	900	257,6
j — k	10,0	30×60	540000	135000	371000	2160	540	154,6

Barras	2.ª etapa		3.ª etapa	
	K	Coef. distr.	K	Coef. distr.
i — j	3600	0,979	257,6	0,193
j — i	—	—	—	—
j — k	77,3	0,021	1080	0,807

Quadro 12-A — Distribuição e transmissão de momentos (4.º exemplo)

Nós		i		j				k		j		i'	
Barras		i — j		j — i		j — k		k — j		j — i'		i — j	
Eixos		1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3
1.ª etapa Mx		+1500		−1500						−1500		+1500	
2.ª etapa	Coef. dist.			0,979			0,021						
	Mx	+1500		−1500						−1500		+1500	
	M. distr.			+1468			+32			+1468			
	M. transm.	+734							−32			+734	
3.ª etapa	Coef. dist.				0,193	0,807							
	Mx					+2000		−2000					
	M. distr.				−386	−1614					+386		
	M. transm.		+386					−807					−368
4.ª etapa Mx		+1000 x		+1000 x						− 5920		− 5920	
5.ª etapa	Coef. dist.				0,193	0,807							
	Mx					−180 x		−180 x					
	M. distr.				+35 x	+145 x					206		
	M. transm.		−35 x					+73 x					−206
Mom. finais *		+9654	+180	+4388	−180	−360	+64	−6880	−64	−4452	−180	−5186	+180

(*) Obtidos para x=5,12 e multiplicando por 2 os mo-mentos (flectores e de torção) relativos à barra j - k.
Sinais de Cross

só etapa. Temos pois os valores do quadro 13 que permitem escrever o sistema de equações, que nos dá

$$\theta_x = \frac{1900}{0{,}42048} = 4519 \qquad \theta_y = \frac{1545}{0{,}42048} = 3674$$

Momentos distribuídos e transmitidos na barra h — i

$$M^r_{h-i,1} = \frac{1}{4{,}25}\,(-4519\times 0{,}95106 + 3674\times 0{,}30902) = -744 \text{ kgm}$$

$$M^r_{i-h,3} = -\frac{1}{4{,}25}\,(4519\times 0{,}30902 + 3674\times 0{,}95106) = -1150$$

$$M^r_{h-i,1} = -0{,}5\times 744 = -372 \text{ kgm}$$

$$M^r_{h-i,3} = 1{,}0\times 1150 = +1150 \text{ kgm}$$

Momentos distribuídos e transmitidos na barra i — j

$$M^r_{i-j,1} = -\frac{1}{5{,}40}\,(4519\times 0{,}95106 + 3674\times 0{,}30902) = -1000 \text{ kgm}$$

$$M^r_{i-j,3} = \frac{1}{5{,}40}\,(4519\times 0{,}30902 + 3674\times 0{,}95106) = 388$$

$$M^r_{j-i,1} = -0{,}5\times 1000 = -500 \text{ kgm}$$

$$M^r_{j-i,3} = -1{,}0\times 388 = -388$$

Estes valores estão inscritos na figura 17 (sinais de Cross) bem como os valores finais dos momentos. Na hipótese da vida continuar de eixo rectilíneo teríamos a distribuição de momentos e os valores finais indicados na fig. 18 (momentos de torção nulos e momentos flectores maiores).

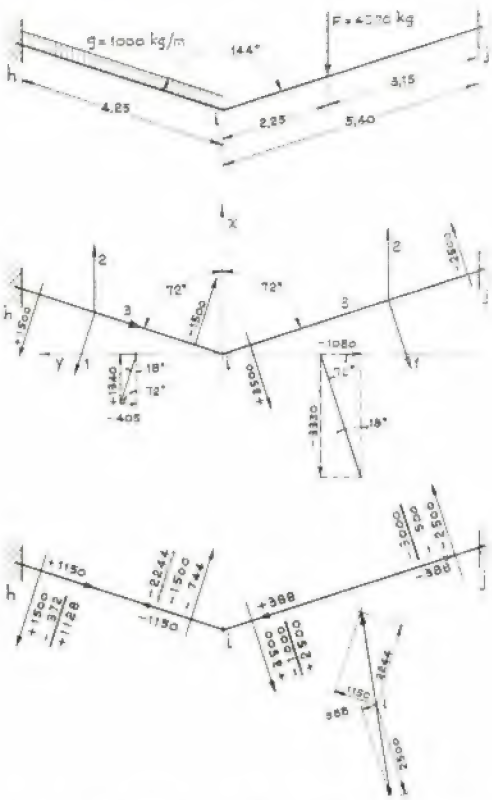


Fig. 17 — Viga contínua de dois tramos (6.º exemplo) eixos de referência, componentes segundo x e y dos momentos flectores aplicados em i, e esquema dos momentos finais.

Fig. 18 — Transmissão de momentos e valores finais correspondentes à viga contínua de eixo rectilíneo a todo o comprimento

Quadro 13 — Valores característicos do nó i (5.º exemplo)

Barras	i — j			i — h			Σ
Eixos	1	2	3	1	2	3	
cos α	−0,95106	0,00000	−0,30902	−0,95106	0,00000	−0,30902	—
cos β	0,30902	0,00000	−0,95106	−0,30902	0,00000	0,95106	—
cos γ	0,00000	1,00000	0,00000	0,00000	1,00000	0,00000	—
K	1/4,25	1/4,25	1/4,25	1/5,40	1/5,40	1/5,40	—
K cos α cos β	−069152	0	0,069152	0,054425	0	−0,054425	0
K cos² α	0,212827	0	0,022469	0,167503	0	0,017684	0,42048
K cos² β	0,022469	0	0,212827	0,017684	0	0,167503	0,42048
K cos² γ	0	0,235294	0	0	0,185185	0	0,42048
Mx	1500×0,95106=1430			−3500×0,95106=−3330			−1900
My	−1500×0,30902=−465			−3500×0,30902=−1080			−1545

Quadro 14 — Valores característicos do nó i (6.º exemplo)

Barra		i — h			i — j			Σ
Eixos		1	2	3	1	2	3	
cos α		−0,866	0	−0,500	−0,866	0	−0,500	—
cos β		0,500	0	−0,866	− 0,500	0	0,866	—
cos γ		0,000	1,000	0	0	1,000	0	—
K		0,8	0,8	0,1408	0,8	0,8	0,1408	—
K cos cos β		−0,3464	0	0,0610	0,3464	0	−0,0610	0
K $\cos^2 \alpha$		0,6000	0	0,0352	0,6000	0	0,0352	1,2704
K $\cos^2 \beta$		0,2000	0	0,1056	0,2000	0	0,1056	0,6112
K $\cos^2 \gamma$		0	0,800	0	0	0,800	0	1,6000
2.ª etapa	Mx	4167×0,866 = 3609			0			3609
	My	−4167×0,500 = −2084			0			−2084
1.ª etapa	Mx	0,24 x×0,500=0,12×10^{-4}x			−24 x×0,866= −0,2078×10^{-4}x			0
	My	0,24 x×0,866=0,2078×10^{-4}x			0,24 x×0,500=0,12×10^{-4}x			0,24 x

Exemplo 6º. — Determinar os esforços actuantes na estrutura constituída por uma viga angular simétrica, conforme fig. 19, de secção rectangular constante de altura igual à largura (k=1,69) e sujeita a uma carga uniformemente distribuída de 2000 kg/m no vão h — i.

Consideram-se duas etapas, 1.ª flexão nas barras h — i e i — j, e 2.ª deslocação vertical Δ do nó i.

Momento de encastramento perfeito na barra h — i, devido às cargas

$$M^e = \frac{2000 \times 5{,}0^2}{12} = 4167 \text{ kgm}$$

e devido ao deslocamento vertical do apoio i

$$M^{e'} = \frac{6\,EI}{5}\,\Delta = 0{,}24\,x$$

sendo EI Δ = x

Rigidezes de flexão e de torção

$$\frac{4\,EI}{l} = \frac{4}{5} = 0{,}8\,; \quad \frac{GJ}{l} = \frac{k\,EI}{2{,}4 \times 5} = \frac{1{,}69}{12} = 0{,}1408$$

fazendo EI = 1 porque só interessam valores relativos.

Sistema característico do nó i (1.ª etapa)

$1{,}2704\,\theta_x = -3609$	$\theta_x = -2840$
$0{,}6112\,\theta_y = 2084$	$\theta_y = 3410$

Momentos distribuídos no nó i (1.ª etapa), ver fig. 19.

$M^r_{i-h,1} = 0{,}8(2840 \times 0{,}866 + 3410 \times 0{,}500) = 3331$ kgm

$M^r_{i-h,3} = 0{,}1408(2840 \times 0{,}500 - 3410 \times 0{,}866) = -216$

$M^r_{i-j,1} = 0{,}8(2840 \times 0{,}866 - 3410 \times 0{,}500) = 603$

$M^r_{i-j,3} = 0{,}1408(2840 \times 0{,}500 + 3410 \times 0{,}866) = 615$

Esforço transverso no nó i

$$2000 \times \frac{5{,}0}{2} - \frac{5832 - 836 - 603 - 301}{5{,}0} = 4180 \text{ kg}$$

Sistema característico do nó i (2.ª etapa),

$1{,}2704\,\theta_x = 0$	$\theta_x = 0$
$0{,}6112\,\theta_y = -0{,}24\,x$	$\theta_y = -0{,}393\,x$

Momentos distribuídos no nó i (2.ª etapa), fig. 19.

$M^r_{i-h,1} = -0{,}8 \times 0{,}393\,x \times 0{,}500 = -0{,}1572\,x$

$M^r_{i-h,3} = +0{,}1408 \times 0{,}393\,x \times 0{,}866 = 0{,}0479\,x$

$M^r_{i-j,1} = 0{,}8 \times 0{,}393\,x \times 0{,}500 = +0{,}1572\,x$

$M^r_{i-j,3} = -0{,}1408 \times 0{,}393\,x \times 0{,}866 = -0{,}0479\,x$

Esforço transverso no nó i (2.ª etapa)

$$2\,\frac{(0{,}1614 + 0{,}0828)}{5}\,x = 0{,}09768\,x$$

Equação de equilíbrio

$$x = \frac{4180}{0{,}09768} = 42790$$

Momentos finais, de flexão (sinais de Cross)

$M^r_{h-i,1} = 5832 + 0{,}1614 \times 42790 = 12740$ kgm

$M^r_{i-h,1} = -836 + 0{,}0828 \times 42790 = 2700$ kgm

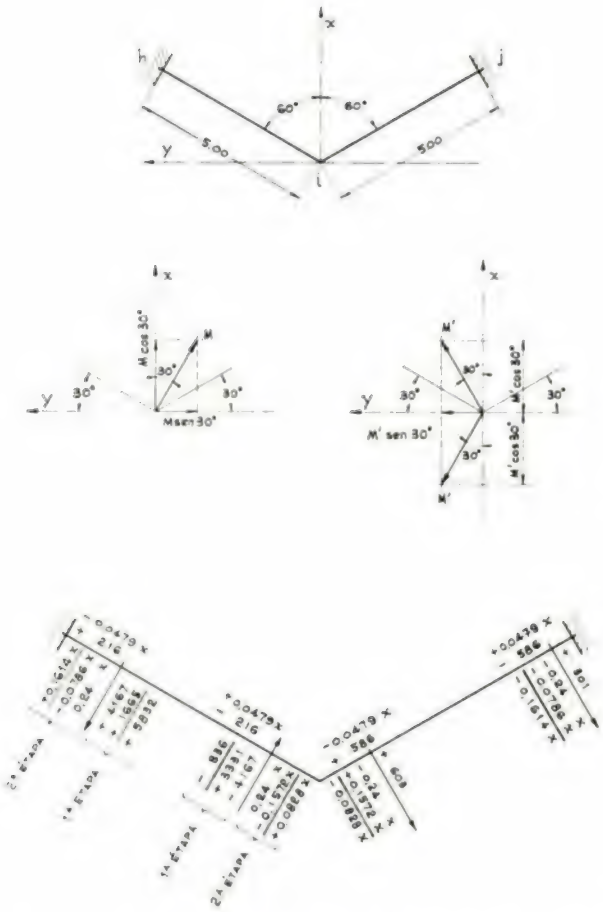


Fig. 19 — Distribuição e transmissão de momentos que correspondem à estrutura do exemplo 6.º

$$M_{i-j,1} = +603-0{,}0828\times42790 = -2940 \text{ kgm}$$

$$M_{j-i,1} = +301-0{,}1614\times42790 = -6600 \text{ kgm}$$

Momentos finais de torção (sinais de Cross)

$$M_{h-i,3} = +216-0{,}0479\times42790 = -1830$$

$$M_{i-h,3} = -216+0{,}0479\times42790 = +1830$$

$$M_{i-j,3} = 615-0{,}0479\times42790 = -1435$$

$$M_{j-i,3} = -615+0{,}0479\times42790 = +1435$$

Exemplo 7.º — Desenhar o diagrama de momentos actuantes na estrutura na fig. 20, sendo as barras de momento inércia constante e tais que

$$\frac{EI}{GI} = \frac{4}{3}$$

Dada a simetria das cargas e da estrutura, (viga quebrada, encastrada em h e k) toma-se metade desta, e para rigidezes

$$\text{barra } i-j, \ \frac{2\,EI}{600}, \text{ à torção } 0$$

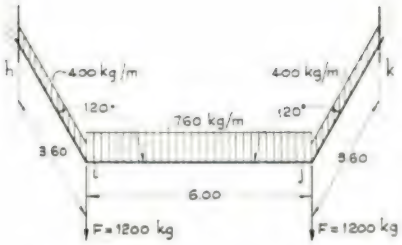


Fig. 20 — Estrutura do exemplo 7.º

$$\text{barra } h-i, \ \frac{4\,EI}{360}, \text{ à torção } \frac{GI_t}{l} = \frac{4\times360}{3\,EI}$$

Os momentos de encastramento perfeito são na 1.ª etapa

$$\text{barra } h-i, \ \frac{400\times3{,}6^2}{12} = 432 \text{ kgm}$$

$$\text{barra } i-j, \ \frac{760\times6{,}0^2}{12} = 2280 \text{ kgm}$$

e na 2.ª etapa

$$\text{barra } h-i, \ \frac{6\,EI}{l^2}\,\Delta = \frac{EI}{21600}\,\Delta \text{ kg. cm}$$

e nulo na barra i — j. O cálculo prossegue como no exemplo anterior. Sistema característico do nó i (1.ª etapa)

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{81{,}75}{7200}\,EI\,\theta_x - \dfrac{17{,}753}{7200}\,EI\,\theta_y = 1600 \\[2ex] -\dfrac{17{,}753}{7200}\,EI\,\theta_x + \dfrac{37{,}25}{7200}\,EI\,\theta_y = 1356 \end{array}\right.$$

$$\theta_x = \frac{22{,}06\times10^4}{EI} \qquad \theta_y = \frac{36{,}73\times10^4}{EI}$$

Momentos distribuídos e transmitidos no nó I (barra i — h)

$$M^r_{i-h,1} = \frac{EI}{90}(-22{,}06\times0{,}866+36{,}73\times0{,}500)\times$$

$$\times\frac{10^4}{EI} = -81$$

$$M^r_{i-h,1} = -\frac{EI}{480}(22{,}06\times0{,}500+36{,}73\times0{,}866)\times$$

$$\times\frac{10^4}{EI} = -892$$

$$M_{h-i,1} = -0{,}5\times81 = -40 \text{ kgm}$$

$$M_{h-i,3} = 1{,}0\times892 = +892 \text{ kgm}$$

Quadro 15 — Valores característicos do nó i (7.º exemplo)

Barras		i — h			i — j			Σ
Eixos		1	2		1	2		
cos α		−0,866	0	−0,500	−0,866	0	−0,500	—
cos β		0,500	0	−0,866	−0,500	0	0,866	—
cos γ		0	1,000	0	0	1,000	0	—
K		EI/90	—	EI/480	EI/300	—	0	—
K cos α cos β		−433 EI/90	0	0,433 EI/480	0,433 EI/300	0	0	−17,753/7200 EI
K cos² α		0,75 EI/90	0	0,25 EI/480	0,75 EI/300	0	0	81,75/7200 EI
K cos² β		0,25 EI/90	0	0,75 EI/480	0,25 EI/300	0	0	37,25/7200 EI
K cos² γ		0	—	0	0	—	0	0
1.ª etapa	Mx	432×0,866 = 374			−2280×0,866 = −1974			−1600
	My	−432×0,500 = −216			−2280×0,500 = −1140			−1356
2.ª etapa	Mx	−EI/2160×0,866 Δ			—			−0,866 EI/2160 Δ
	My	EI/2160×0,500 Δ			—			+0,500 EI/2160 Δ

Momentos distribuição no nó i (barra i — j)

$$M^r_{i-j,1} = -\frac{EI}{300}(22{,}06\times0{,}866+36{,}73\times0{,}500)\times$$

$$\times\frac{10^4}{EI} = -1249$$

$$M^r_{i-j,3} = 0$$

Esforço transverso no nó i (1.ª etapa), ver fig. 21.

$$T'_i = \frac{400\times3{,}6}{2}+\frac{760\times6{,}0}{2}+\frac{513-392}{3{,}6} = 3034 \text{ kg}$$

Sistema característico do nó i (2.ª etapa)

$$81{,}75\,\theta_x - 17{,}735\,\theta_y = \frac{0{,}866\times7200}{21600}\Delta$$

$$-17{,}753\,\theta_x + 37{,}25\,\theta_y = -\frac{0{,}500\times7200}{21600}\Delta$$

$\theta_x = 0{,}002854\,\Delta$ $\qquad$ $\theta_y = -0{,}003114\,\Delta$

Momentos distribuídos e transmitidos no nó i (barra i — h) fazendo EI Δ = x

$$M^r_{i-h,1} = -\frac{EI}{90}(0{,}002854\times0{,}866+0{,}003114\times500)$$

$$\Delta = -4{,}476\times10^{-5}\text{ x kgcm}$$

$$M^r_{i-h,3} = \frac{EI}{480}(-0{,}002854\times0{,}500+0{,}003114\times$$

$$\times0{,}866)\Delta = +0{,}2645\times10^{-5}\text{ x kgcm}$$

$$M_{h-i,1} = -0{,}5\times4{,}476\times10^{-5}x = -2{,}238^{-5}x \text{ kgcm}$$

$$M_{h-i,3} = -1{,}0\times0{,}2645\times10^{-5}x = -0{,}2645^{-5}x \text{ kgcm}$$

Momentos distribuídos no nó i (barra i — j)

$$M^r_{i-j,1} = \frac{EI}{300}(-0{,}002854\times0{,}866+0{,}003114\times$$

$$\times0{,}500)\Delta = -0{,}3049\times10^{-5}x \text{ kgcm}$$

$$M^r_{i-j,3} = 0$$

Esforço transverso no nó i (fig. 21)

$$T''_i = -\frac{0{,}1536+2{,}3916}{360}\times10^{-5}x = -0{,}707\times10^{-7}x$$

Equação de equilíbrio do nó i

$$T'_i + T''_i + 1200 = 0;\ x = \frac{4234\times10^7}{0{,}707} = 59{,}9\times10^9$$

Os momentos da etapa 2 são multiplicados por $59{,}9\times10^9$ (kgcm) ou 5990×10^5 (kgcm).

Momentos finais (sinais de Cross)

Momentos flectores

$M_{h-i,1} = 392+2{,}3916\times5990 = 14720$ kgcm

$M_{h-i,1} = -513+0{,}1536\times5990 = 400$

$M_{h-i,1} = 1031-0{,}3049\times5990 = 800$

Momento a meio da barra i — j

$$M = \frac{760\times6{,}0^2}{8}+800 = 4220 \text{ kgm}$$

Momento de torção (só nas barras h — i e j — k)

$M_t = -892 + 0{,}2645 \times 5990 = 690$ kgm

O diagrama de momentos é o indicado na fig. 21, desenhado só para metade da estrutura, e para a convenção corrente de sinais.

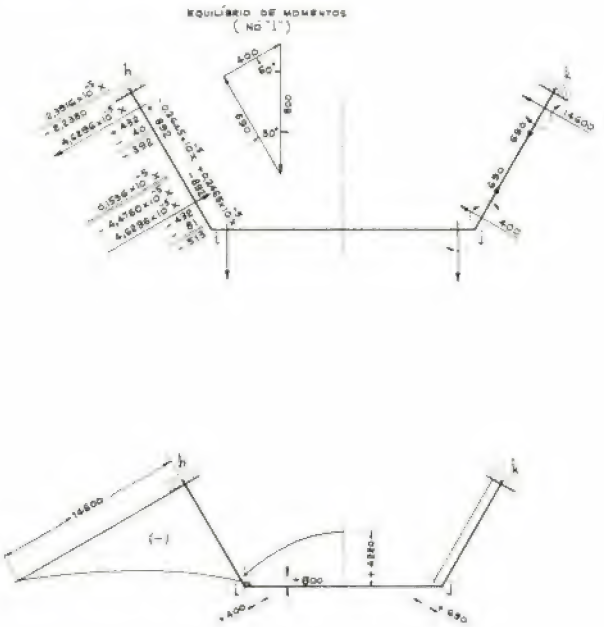


Fig. 21 — Transmissão e distribuição de momentos e valores finais correspondentes ao exemplo 6.º

Exemplo 8.º — Pórtico da fig. 22, sujeito à carga horizontal de 10000 kg aplicada no nó i. Dada a anti-simetria da carga, considera-se apenas metade da estrutura, a barra i — i' articulada a meio

As secções das barras e as respectivas rigidezes constam do quadro 18, sendo as rigidezes da barra i — i' (cortada) respectivamente 1,5 e 2,0 vezes as rigidezes de flexão e de torção. Todos os valores se consideram divididos por E.

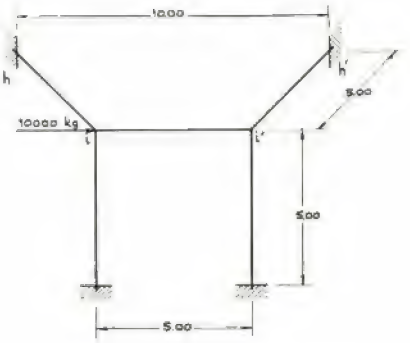


Fig. 22 — Estrutura do exemplo 8.º

Os momentos aplicados às barras no nó i são devidos apenas ao deslocamento deste no plano horizontal h — i — i' — h'. Os valores relativos de tal deslocamento tiram-se do triângulo rectângulo construído com um dos catetos sobre o eixo da barra i — i', o outro cateto perpendicular a ela, e a hipotenusa perpendicular ao eixo da barra h — i. Atender porém a que, deslocando-se também i' na direcção oposta, perpendicularmente a i — i', o valor do deslocamento relativo dos nós i e i' desta barra será o dobro do valor anteriormente determinado, isto é, de grandeza igual ao deslocamento da barra h — i (1,155 Δ sendo Δ o deslocamento de i — j na direcção de i — i').

O momento flector devido ao deslocamento da barra h — i é dirigido segundo o eixo 2 para baixo, e o momento devido ao deslocamento da barra i — i' é também dirigido segundo o eixo 2 (ver fig. 23 que indica os eixos de referência), mas para cima. Anula portanto o anterior porque a grandeza do deslocamento das duas mencionadas barras é igual em ambos os casos a 1,155 Δ.

Quanto ao pilar i — j, fazemos coincidir os seus eixos 1 e 2 com os eixos x e y, respectivamente, mas de sinal contrário. O deslocamento Δ decompõe-se segundo os eixos 1 e 2 do pilar de acordo com a fig. 24.

Quadro 16 — Dimensões e rigidezes das barras da estrutura do exemplo 8.º

Barras	l (m)	Secção (cm×cm)		I_1	I_2	I_3
h — i	5,0	30×60		540000	135000	370980
i — j	5,0	50×50		520833	520833	880208
i — i'	5,0	30×60		540000	135000	370980
Barras	Rigidezes reais			Rigidezes virtuais		
	K'_1	K'_2	K'_3	K_1	K_3	K_2
h — i	4320	1080	309	4320	1080	309
j — i	4167	4167	734	4167	4167	734
i — i'	4320	1080	309	6480	1620	618

$\Delta_1 = 0{,}500 \times 1{,}155\,\Delta \qquad \Delta_2 = 0{,}866 \times 1{,}155$

$$\frac{6\,EI}{l^2}\,\Delta_1 = \frac{1{,}155 \times 6 \times 0{,}5}{5^2}\,EI\,\Delta = 1200\,x$$

$$\text{sendo } x = \frac{1{,}155\,EI\,\Delta}{10000}$$

(I = 4167, momento de inércia do pilar)

$$\frac{6\,EI}{l^2}\,\Delta_2 = \frac{6 \times 1{,}155 \times 0{,}866}{5^2}\,EI\,\Delta = 2078\,x$$

Com o atrás indicado e atendendo à fig. 25, podemos, finalmente, preencher o quadro 17.

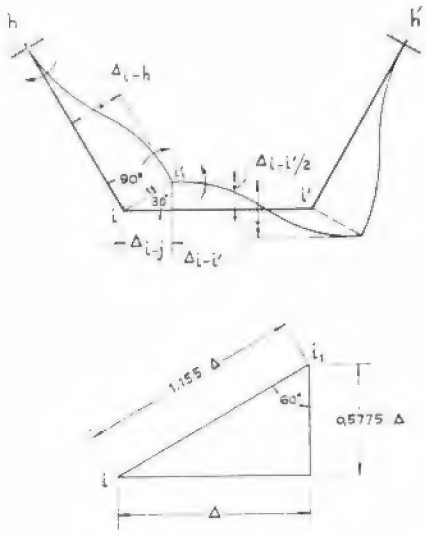


Fig. 23 — Deslocamentos relativos das barras que concorrem no nó i da estrutura do exemplo 8.º

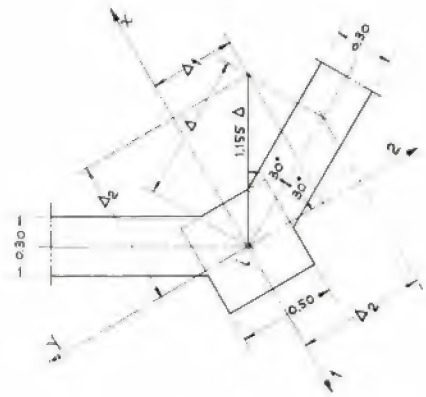


Fig. 24 — Esquema de ligação das barras concorrentes no nó i, e disposição dos respectivos eixos

Sistema característico do nó i

$$\begin{aligned} 12500\,\theta_{x,i} + 801\,\theta_{y,i} &= 1200\,x \\ 801\,\theta_{x,i} + 7563\,\theta_{y,i} &= 2078\,x \\ 3434\,\theta_{z,i} &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \theta_{x,i} &= 0{,}0789\,x \\ \theta_{x,i} &= 0{,}266\,x \\ \theta_{z,i} &= 0 \end{aligned}$$

Momentos distribuídos nas extremidades das barras que concorrem em i

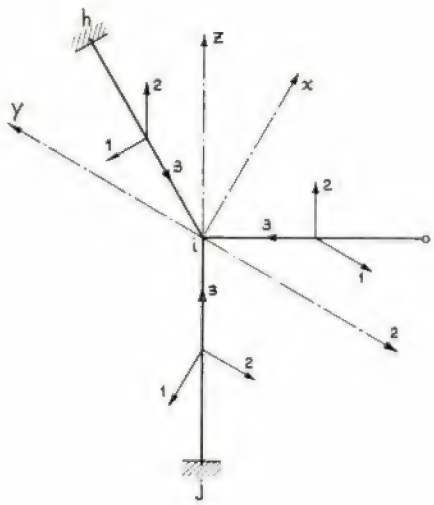
$$M^r_{i-h,1} = 4320(-0{,}0789 \times 0{,}866 + 0{,}266 \times 0{,}500)\,x = \\ = +280\,x\ \text{kgm}$$

$$M^r_{i-h,2} = 1080(0{,}0789 \times 0 + 0{,}266 \times 0)\,x = \\ = 0$$

$$M^r_{i-h,3} = -309(0{,}0789 \times 0{,}500 + 0{,}266 \times 0{,}866)\,x = \\ = -83\,x$$

Quadro 17 — Valores característicos do nó i (8.º exemplo)

Barra	i — h			i — j			i — i'			Σ
Eixos	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
cos α	−0,866	0,000	−0,500	−1,000	0,000	0,000	0,866	0,000	−0,500	—
cos β	0,500	0,000	−0,866	0,000	−1,000	0,000	0,500	0,000	0,866	—
cos γ	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	1,000	0,000	1,000	0,000	—
K	4320	1080	309	4167	4167	734	6480	1620	618	—
K cos α cos β	−1871	0	134	0	0	0	2806	0	−268	801
K cos² α	3240	0	77	4167	0	0	4860	0	155	12500
K cos² β	1080	0	232	0	4167	0	1620	0	464	7563
K cos² γ	0	1080	0	0	0	734	0	1620	0	3434
Mx	—			−1200 x			—			−1200 x
My	—			−2078 x			—			−2078 x



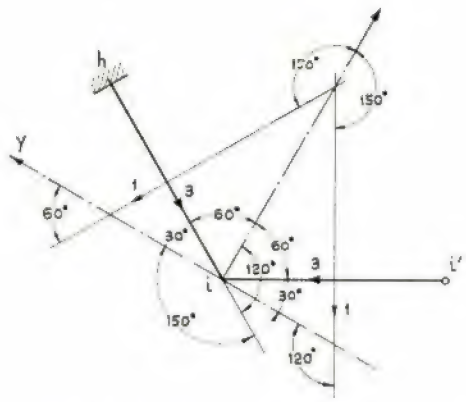


Fig. 25 — Eixos de referência e ângulos das barras que concorrem no nó i da estrutura do 8.º exemplo

$$M^r_{i-j,1} = -4167(0{,}0789\times1{,}000+0{,}266\times0)\ x = \\ = -\ 329\ x$$

$$M^r_{i-j,2} = 4167(0{,}0789\times0-0{,}266\times1{,}000)\ x = \\ = -\ 1108\ x$$

$$M^r_{i-j,3} = 734(0{,}0789\times0+0{,}266\times0)\ x = 0$$

$$M^r_{i-i,1} = -6480(0{,}0789\times0{,}866+0{,}266\times0{,}500)\ x = \\ = -\ 1304\ x$$

$$M^r_{i-i,2} = -1620(0{,}0789\times0+0{,}266\times0)\ x = 0$$

$$M^r_{i-i,3} = 618(-0{,}0789\times0{,}500+0{,}266\times0{,}861)\ x = \\ = 118\ x$$

Atendendo aos momentos iniciais e aos transmitidos, e ainda aos valores dos momentos de inércia das várias barras, teremos os seguintes momentos finais

Barra i — h,

$$M_{i-h,1} = 289\ x\ \text{kgm}; \qquad M_{h-i,1} = 140\ x\ \text{kgm}$$

$$M_{i-h,2} = M_{i-h,2} = -\frac{6\ EI}{5{,}0^2}\times1{,}155\times \\ \times\frac{1080}{4167}\ \Delta = 622\ x$$

$$M_{i-h,3} = 83\ x$$

Barra i — i'

$$M_{i-i',1} = -1304\ x$$

$$M_{i-i',2} = 622\ x$$

$$M_{i-i',3} = 118\ x$$

Barra i — j

$$M_{i-j,1} = (1200-329)\ x = 871\ x$$

$$M_{i-j,2} = (2078-1108)\ x = 970\ x$$

$$M_{i-j,3} = 0$$

$$M_{j-i,1} = (1200-165)\ x = 1035\ x$$

$$M_{j-i,2} = (2078-554)\ x = 1524\ x$$

$$M_{j-i,3} = 0$$

Neste ponto podemos fazer uma verificação dos cálculos através do estudo do equilíbrio do nó i, fig. 26. Para a determinação do valor de x temos que calcular as reacções de apoio, que se representam, as verticais em alçado e as horizontais em planta, fig. 28.

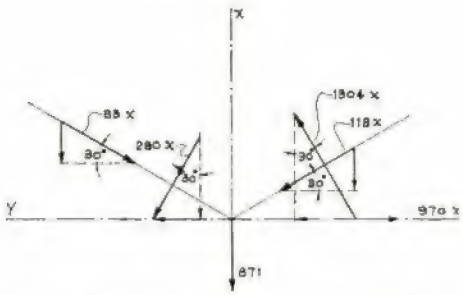


Fig. 26 — Verificação do equilíbrio dos momentos aplicados no nó i

$$H = [970 - (280 + 1304)\times0{,}500 - (118 + 83)\times \\ \times0{,}866]\ x = 0$$

$$V = [871 - (118 - 83)\times0{,}500 - (1304 - 280)\times \\ \times0{,}866]\ x = 0$$

Obtemos para reacções verticais, no apoio h

$$T_{h,v} = \frac{140+280}{5{,}0}\ x = 84\ x$$

e no apoio j,

$$T_{h,v} = -(84+2\times\frac{1304}{5{,}0})\ x = -605{,}6\ x$$

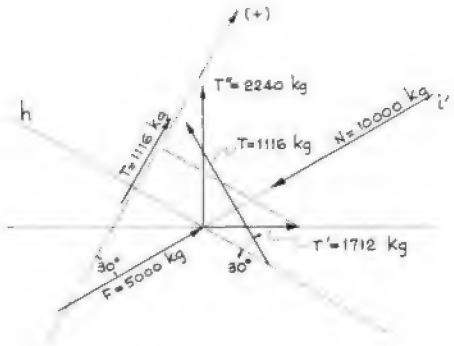


Fig. 27 — Verificação do equilíbrio das forças aplicadas no nó i

As componentes horizontais das reacções são no apoio h, perpendiculares à barra h — i,

$$T_{h,h} = -2 \times \frac{622}{5,0} x = -248,8 x$$

e na base do pilar i — j

$$T_{j,1} = \frac{970+1524}{5,0} x = 499 x$$

$$T_{j,2} = \frac{871+1035}{5,0} x = 381 x$$

Deduz-se a componente de reacção horizontal em h, dirigida segundo o eixo da barra h — i, compondo os dois esforços transversais na parte superior do pilar (fig. 27). Corresponde-lhe uma tracção na barra h — i de valor

$$5000 \times 0,500 + (248,8 \times 0,866 + 499 \times 0,500)\, x - 318 \times 0,866\, x = 2500 \text{ kg}$$

Projectando estas forças segundo a linha de acção de i — i' e segundo a perpendicular a esta

$$1250 + (249,5 + 330,0 + 215,5 + 67,5)\, x = 5000$$

$$x = \frac{3750}{862,5} = 4,35$$

Os momentos finais (sinais de Cross) serão os seguintes Barra i — h,

$$M_{i\text{-}h,1} = 280 \times 4,35 = 1220 \text{ kgm}$$

$$M_{h\text{-}i,1} = 140 \times 4,35 = 610$$

$$M_{i\text{-}h,2} = M_{h\text{-}i,3} = 622 \times 4,35 = 2705$$

$$M_{i\text{-}h,3} = 83 \times 4,35 = 360$$

Barra i — i'

$$M_{i\text{-}i',1} = -1304 \times 4,35 = 5670 \text{ kgm}$$

$$M_{i\text{-}i',2} = 622 \times 4,35 = 2705$$

$$M_{i\text{-}i',3} = 118 \times 4,35 = 515$$

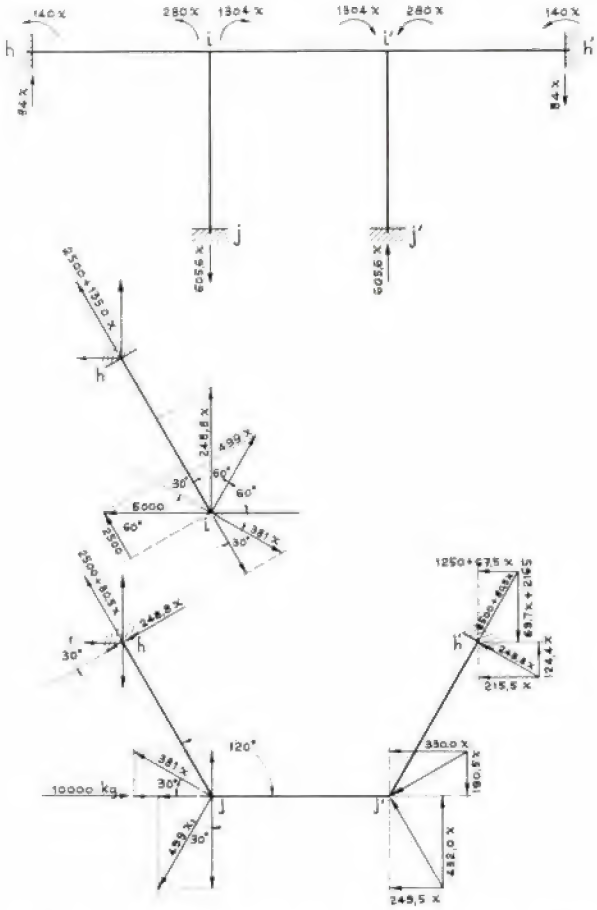


Fig. 28 — Reacções de apoio da estrutura, dirigidas segundo o eixo da barra j — j' e direcção perpendicular a esta

Barra i — j

$$M_{i\text{-}j,1} = 871 \times 4,35 = 3790 \text{ kgm}$$

$$M_{j\text{-}i,1} = 1035 \times 4,35 = 4500$$

$$M_{i\text{-}j,2} = 970 \times 4,35 = 4220$$

$$M_{j\text{-}i,2} = 1524 \times 4,35 = 6630$$

$$M_{i\text{-}j,3} = M_{j\text{-}i,3} = 0$$

Podemos fazer uma última verificação de equilíbrio do nó i, agora das forças nele aplicadas, projectando-as sobre um eixo horizontal e perpendicular à barra h — i. Vem, de acordo com a fig. 28,

$$\frac{2705 \times 2}{5,0}(1+0,500) + 5000 \times 0,866 - 10000 \times 0,866 +$$

$$+ \frac{3790+4500}{5,0} \times 0,500 + \frac{4220+6630}{5,0} \times$$

$$\times 0,866 = 4331 - 4330 = 0$$

5 — BIBLIOGRAFIA

[1] Catuneanu (Constatin), Anastasescu (Decebal) e Munteanu (Ion) — *«Generalizarea Metodei Repartizarii Momentelor la Calculul Cadrelor Spatrale», Butetinul Stiintific si Tehnic Al Institutului Politehnic Timisoara, 1958.*

[2] B. Rawlings — *«The General Moment Distribution Analysis of Space Frame», The Structural Engineer, Junho 1960.*

[3] Van Langendonck (Telemaco) — *«Tabelas para o Cálculo de Vigas — Balcões «Boletim do Instituto de Engenharia, (S. Paulo), Fevereiro 1936.*

[4] Correia Araújo (F. Sarmento) — *«Cálculo de Estruturas no Espaço pelo método Cross». Engenharia n.° 1, Porto 1945.*

[5] Brazão Farinha — *«Viga Angular Simétrica de Barras Perpendiculares» Técnica n.° 420, Setembro 1974.*

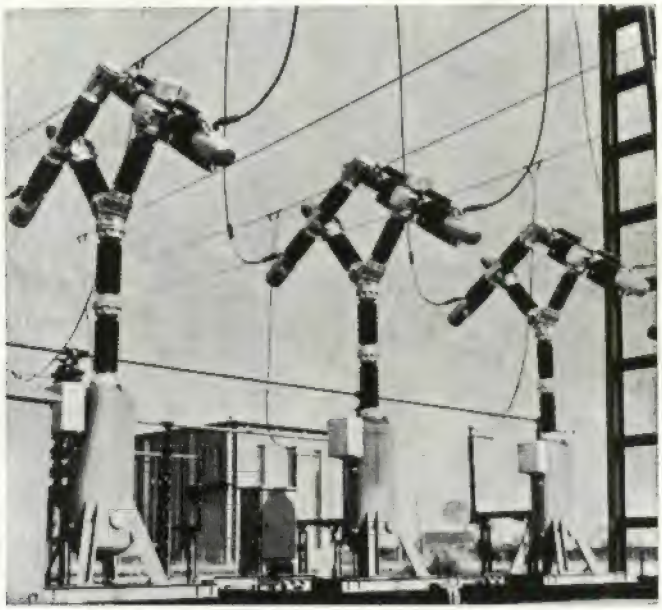
[6] Brazão Farinha — *«Viga poligonal Ortoquebrada Simétrica» — Fomento vol. 11, 3.° Trimestre 1973.*

[7] Cunha Amaral (Adolfo Maria da) — *«Viga Contínua Poligonal em Planta» Memória da Ordem dos Engenheiros vol. I — Fasciculo III, Lisboa 1953.*

Feiras, Conferências, Exposições e Congressos

OBJECTIVOS E PROGRAMA	LOCAL, DATA, ORGANIZAÇÕES E INFORMAÇÕES
Equipamento industrial e bens de consumo	Leipzig — R. D. da Alemanha 5 a 12 de Setembro - 76
Indústria mecânica	Brno — Checoslováquia 15 a 23 de Setembro - 76
Bens de consumo	Budapeste — Hungria 22 a 30 de Setembro - 76
International Trade Fair	Elmia, Jönköping, Sweden 27 de Setembro a 1 de Outubro - 76

Disjuntores Brown Boveri de ar comprimido para instalações ao ar livre, para as mais elevadas capacidades de ruptura e tensões de serviço



Instalação de disjuntores ao ar livre, de 245 kV, em serviço na Electricité de France, com disjuntores de ar comprimido, tipo DLF 245, capacidade de ruptura 12 GVA.

Fornecemos:

Disjuntores de ar comprimido para instalações ao ar livre, para tensões de serviço de 72.5 até 765 kV
Correntes nominais de 2000 até 4000 A
Correntes de ruptura até 72 kA

- Elevado grau de segurança
- Construção robusta
- Amplas possibilidades de adaptação ao funcionamento com potências mais elevadas de ruptura devido áo tipo de construção por blocos
- Tempos minimos de disparo
- Aptos a reengate automático rápido

Aproximadamente 20 000 disjuntores Brown Boveri de ar comprimido instalados ao ar livre garantem em 45 paises o funcionamento de rêdes de alta tensão.

BROWN BOVERI

Representada em Portugal por:

Sociedade de Electricidade

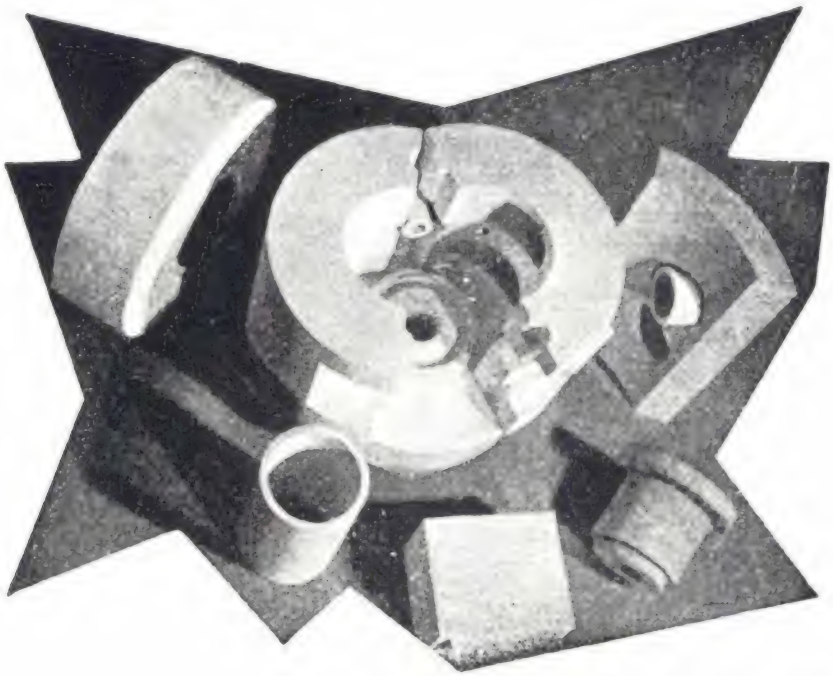
Brown Boveri Limitada

Rua de Sá da Bandeira, 481-2°, Porto

151 663 d VI

a técnica moderna emprega

BETÕES REFRACTÁRIOS



à base dos cimentos

FONDU LAFARGE

e

SECAR 250

porque são

práticos
eficientes
económicos

REFRACTÁRIOS ATÉ 1800° C

REFRACTÁRIOS ISOLANTES ATÉ 1700° C

Os nossos serviços técnicos, especializados, estão à vossa inteira disposição para estudar, sem qualquer encargo da vossa parte, a adaptação dos BETÕES REFRACTÁRIOS a todos os vossos problemas

AGUIAR & MELLO L.DA

P. do Município, 13-1.º — LISBOA — Tel. 32 11 51/2

C. D. U. 007.51.951

Introdução aos conjuntos vagos

António Gouvêa Portela
Prof. Catedrático do I. S. T.

RESUMO

Trata-se duma introdução à Teoria dos Conjuntos Vagos com vista a aplicações a vários domínios nomeadamente à Engenharia.

SUMMARY

An Introduction to the Theory of Fuzzy Sets, in view of applications to various domains, namely to Engineering Science.

1.º CAPÍTULO

JUSTIFICAÇÃO DO CONCEITO DE CONJUNTO VAGO.

Na descrição do universo real o Homem usa espaços artificiais para neles projectar imagens desse real.

As vantagens deste procedimento são variadas:

Na imagem foi abstraído tudo o que no real não é relevante para a resolução do problema em causa.
Isto significa que foi usado um operador-filtrante para projectar o objecto real nesse espaço imagem.

As imagens porque são formas «purificadas» têm propriedades mais uniformes e sujeitam-se a operações formais rigorosas.
O real só depois de convertido em imagem tem tratamento formal.

Por outro lado, sucede que certas conclusões extraídas de processos e raciocínios formais realizados sobre imagens, ao serem reconvertidas no domínio dos objectos reais não se adequam aos factos observados.

Com efeito, as «purificações» e filtrações feitas ao objecto real para criar a imagem desejada foram levadas ao ponto de uma, ou várias, informações relevantes terem sido perdidas no processo.

Este inconveniente força a criação de novos espaços-imagem gozando de novas propriedades e onde as imagens não perderam as tais informações relevantes para a resolução do problema.

Os conjuntos vagos foram desenvolvidos com a finalidade de solucionar certas situações reais onde os conjuntos usuais e respectivas teorias se mostravam inadequados.

Pela apresentação de alguns problemas e casos típicos vão ilustrar-se as insuficiências da teoria clássica dos conjuntos e simultaneamente justificar-se a teoria dos conjuntos vagos (*).

Exemplo 1:

O «experimentador», engenheiro, físico, médico, sociólogo, etc., é o indivíduo responsável pela sondagem do universo real e pela criação da «imagem» do real para posteriores manipulações formais.

Foi um «experimentador» encarregado de formar o conjunto dos objectos reais de cor verde existentes no laboratório e atribuir-lhes um símbolo $(a_1, a_2, \ldots)$. Esta instrução simples, aparentemente, tem a dificuldade da definição do que se entende por um objecto de cor verde.

Verde é toda a radiação compreendida entre duas frequências dadas.

Um objecto é verde se 60% da radiação reflectida cai na banda do verde?e se for só 40% ainda se designa de verde?

Numa lógica vulgar a resolução deste problema envolvia a definição de um conjunto de propriedades $P_1, P_2, \ldots, P_k$ e o estabelecimento de um especificador que permitiria formar o conjunto (X_v) dos objectos verdes. Assim

$$X_v = \{ x;\ P_1,\ P_2, \ldots, P_k \}$$

e o conjunto referencial dos objectos do laboratório era dividido em dois sub-conjuntos: os verdes X_v, e os não verdes $\overline{X}_v$.

Outra forma de resolver este problema seria simplesmente pedir ao experimentador que meça a percen-

(*) A expressão «conjuntos vagos» corresponde às expressões «Fuzzy Sets» referida na literatura inglesa e «Ensembles Flous» referida na literatura francesa. Trata-se de um neologismo.

tagem de energia na janela do espectro considerado verde e forneça uma tabela onde a cada objecto se faz corresponder essa percentagem de verde dada pelo aparelho empregado.

O resultado toma a forma seguinte:

$$\{a_1/v_1,\ a_2/v_2, \ldots \} = X_v$$

onde: a_i é o símbolo dos objectos do laboratório; v_i é a percentagem de verde de um objecto ($o \leqslant v_i \leqslant 1$) e X_v será designado o «conjunto vago» dos objectos existentes no conjunto universal do laboratório - U. Feito agora o pedido ao experimentador de formar o conjunto dos objectos «pesados» existentes no mesmo conjunto universal - U o experimentador não terá mais do que munir-se de um instrumento adequado (balança) e proceder à pesagem dos objectos que pertencem a U. O experimentador fornecerá um conjunto X_e especificado da seguinte forma:

$$X_e = \{a_1/e_1,\ a_2/e_2, \ldots \}$$

onde e_i é a percentagem do peso do objecto a_i para o peso total do conjunto U.

Novamente, o experimentador não teve que decidir se um objecto se deve considerar «pesado» ou «leve», mas apenas indicar o peso, relegando para a teoria o tratamento de informação colhida.

Uma teoria de conjuntos vagos terá de ser constituída para resolver problemas tais como

$$X_e \cap X_v$$

$$X_e \cup X_v$$

$$\bar{X}_e \text{ (complementar de } X_e \text{)}$$

etc., etc.,...

Neste primeiro exemplo não resta dúvida que o problema e a dificuldade foram transferidos do experimentador para o formalista.

Num conjunto vago, a cada um dos pares $\{a/\alpha\}$ dá-se o nome de «caracterizante» e corresponde à tradução de «membership» da literatura inglesa e «appartenance» da literatura francesa.

Ao conjunto de todos os α_i dos elementos a $/\alpha_i$ dá-se o nome de característica do conjunto vago.

Exemplo 2:

Um conjunto U de três caixas (*A*, *B* e *C*) com 100 parafusos cada, é encarado, classicamente, como um conjunto de três elementos $\{a, b, c\} = U$.

Um subconjunto será, por exemplo, $\{a, b\}$, ou seja, {1 elemento *a*, 1 elemento *b*, 0 elemento *c*} e a característica do sub-conjunto $\{a, b\}$ será $\{1, 1, 0\}$.

Vejamos agora como descrever o conjunto usual X, constituído por 20 parafusos do tipo *a*, 30 do tipo *b* e zero do tipo *c*.

Este conjunto não tem descrição clássica no referencial $U = \{a, b, c\}$ porque se consideram *a*, *b* e *c* como *atómicos*, isto é, *indivisíveis*.

O processo usual de resolver o problema consiste em construir um conjunto U* formado por 300 elementos, (300 parafusos), susceptíveis estes de se agruparem em 3 classes de equivalência a, b, e c, com 100 elementos cada. O conjunto proposto seria descrito como:

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{20}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{30}\} = X$$

com

$$\alpha_i \in a$$

$$\beta_i \in b$$

$$X \subseteq U^*$$

Usando o conceito de «conjunto vago» a descrição de X tomava a forma

$$\left\{ a \Big/ \frac{20}{100},\ b \Big/ \frac{30}{100},\ c \Big/ \frac{0}{100} \right\} = X$$

ou

$$\{ a/0{,}2\ ,\ b/0{,}3\ ,\ c/0 \} = X$$

Repare-se que as fracções

$$\frac{20}{100},\ \frac{30}{100},\ \text{etc.}$$

podem descrever-se de um modo geral como

$$\frac{\text{card } \{a'\}}{\text{card } \{a\}}$$

onde $\{a\}$ é, neste caso, o conjunto de parafusos da caixa *A* (100 parafusos) e $\{a'\}$ é um sub-conjunto de *a*, neste caso, 20 parafusos. Ora:

$$\text{card } \{a'\} = 20$$

$$\text{card } \{a\} = 100$$

Repare-se que, como $\{a'\} \subseteq \{a\}$ se tivermos:

$$\text{card } \{a'\} \leqslant \text{card } \{a\}$$

e daí que

$$0 \leqslant \frac{\text{card } \{a'\}}{\text{card } \{a\}} \leqslant 1$$

Esta forma de representar o conjunto é menos precisa (mais vaga) do que a anterior, porque não exige a nomeação, ou identificação, dos elementos.

Os resultados também são diferentes quando se opera com estes conjuntos. Com efeito, seja definido outro conjunto

$$Y \subseteq U^*$$

constituído por 5 elementos de *A*, 7 elementos de *B* e 10 elementos de *C*, isto é:

$$Y = \{\alpha_{21}, \ldots \alpha_{25}, \beta_{31}, \ldots \beta_{37}, \gamma_1, \ldots \gamma_{10}\}$$

$$\alpha_i \in a$$
$$\beta_i \in b$$
$$\gamma_i \in c$$

A reunião X U Y será:

$$Z = X \cup Y = \{\alpha_1, \ldots \alpha_{25}, \beta_1, \ldots \beta_{37}, \gamma_1, \ldots \gamma_{10}\}$$

Note-se que houve o cuidado de fazer $X \cap Y = \emptyset$, mas se Y fosse especificado como se segue

$${}_*Y = \{\alpha_1, \ldots \alpha_5, \beta_{14}, \ldots \beta_{20}, \gamma_1, \ldots \gamma_{10}\}$$

então a sua reunião com X forneceria o seguinte resultado:

$${}_*Z = X \cup {}_*Y = \{\alpha_1, \ldots \alpha_{20}, \beta_1, \ldots \beta_{30}, \gamma_1 \ldots \gamma_{25}\}$$

Desta observação resulta que

$$X \cup Y \neq X \cup {}_*Y$$

No entanto, se definissemos os «conjuntos vagos» correspondentes a Y e ${}_*Y$, teríamos em ambos os casos

$$Y = {}_*Y = \{a/0{,}05,\ b/0{,}07,\ c/0{,}10\}$$

logo o processo é *cego* na descrição atómica dos conjuntos Y e ${}_*Y$, e daí resulta, antecipando conhecimentos, que

$$X \cup Y = X \cup {}_*Y = \{a/0{,}2\ ;\ b/0{,}3\ ;\ c/0{,}1\}$$

expressão que mostra uma aproximação entre os conjuntos vagos e clássicos.

Exemplo 3:

Tem interesse neste exemplo chamar a atenção para o contexto em que é descrito um conjunto vago. «Um leão atacou e mordeu um homem». Geralmente admite-se que foi definido previamente um *conjunto universal*, assim, neste caso ele poderia ser o seguinte:

$$\text{Conjunto Universal} \quad U = \left\{ \begin{matrix} a & , & b & , & c \\ \text{leão} & & \text{elefante} & & \text{rato} \end{matrix} \right\}$$

O sub-conjunto vago A de animais de U que atacam o homem pode ser definido deste modo

$$A = \{a/0{,}9;\ b/0{,}7;\ c/0{,}01\}$$

O conjunto vago B dos animais que *usam morder* para atacar

$$B = \{a/0{,}8;\ b/0{,}01;\ c/0{,}8\}$$

o conjunto intersecção $A \cap B$ será dado, antecipando conhecimentos, por:

$$A \cap B = \{a/0{,}8;\ b/0{,}01;\ c/0{,}01\}$$

o que aponta para o leão (a) como o animal culpado do acto.

Exemplo 4:

Neste exemplo vai chamar-se a atenção para as relações entre conjuntos.

Seja, por exemplo, o conjunto usual constituído pelos elementos: cão (a), pato (b), foca (c), pombo (d), e o cojunto de atributos «viver na água» (Ag), «viver na terra» (Te), «viver no ar» (Ar).

Em conjuntos clássicos o modo de descrever a relação entre o conjunto {a, b, c, d} e o conjunto {Ag, Te, Ar} é, por exemplo, o seguinte:

	Ag	Te	Ar
a	0	1	0
b	0	1	0
c	1	0	0
d	0	0	1

se atendermos que as focas e os pombos também vivem em terra, e que o cão também pode nadar, e que o pato não só voa como nada, outra forma de descrever a relação será a seguinte:

	Ag	Te	Ar
a	1	1	0
b	1	1	1
c	1	1	0
d	0	1	1

Qualquer das duas formas de descrever a relação não satisfaz o experimentador encarregado da descrição:

— a primeira é muito restrita

— a segunda é muito lata

Mas se aceitarmos que a percentagem do tempo que, em média, os animais referidos gastam em terra, na água, ou no ar, é uma resposta ao problema então a descrição já pode ser mais consentânea com a realidade:

	Ag	Te	Ar
a	0,01	0,99	0,00
b	0,60	0,30	0,10
c	0,70	0,30	0,00
d	0,00	0,70	0,30

Este exemplo mostra como o conjunto vago, como conceito, descreve melhor o real, em certas situações, do que os conjuntos usuais.

Se se desejar descrever, por exemplo, um conjunto A constituído pelos pares: (a, Ag), (b, Ar), (d, Ag) deverá usar-se a forma seguinte:

$$A = \{\ (a, Ag)/0{,}01;\ (b, Ar)/0{,}10;\ (d, Ag)/0{,}0;\ \text{restantes}/0{,}0\}$$

Exemplo 5:

Este exemplo procura chamar a atenção para o caso do referencial U não ser discreto.

Seja então um registador de som que grava uma fita magnética. O resultado é obtido quanto ao nível sonoro foi indicado na figura A.

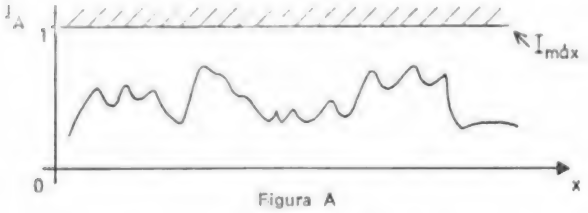


Figura A

Tomou-se nota do valor máximo ($I_{máx}$) que é possível registar na fita.

Desgravando e tornando a gravar outro registo sonoro na mesma fita obtém-se a figura B.

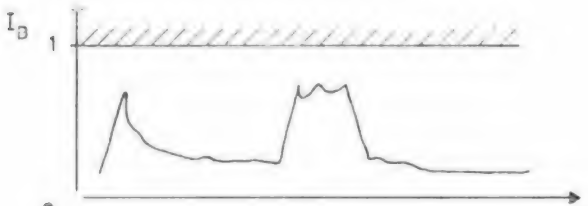


Figura B

Estes dois registos efectuados podem entender-se como a descrição de dois conjuntos vagos A e B definidos sobre o referencial U.

Podem reunir-se, interceptar-se, complementar-se, etc.

Exemplo 6:

Até aqui, nos exemplos apresentados os valores que afectavam os elementos do conjunto referencial U eram sempre colhidos no intervalo [0,1].

Aqui, procura-se fugir a esta regra porque não é forçoso que assim seja.

Vejamos o seguinte problema:

«Falar verdade» será simbolizado por α.

«Falar mentira» será simbolizado por β.

«Falar parcialmente verdade» será simbolizado por γ.

Admite-se que $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$

$\{a, b, c\} = U$ é um conjunto de três pessoas que declararam, cada uma, uma proposição.

O valor do conjunto das três proposições é o conjunto vago X assim descrito:

$$X \equiv \{a/\alpha\ ;\ b/\gamma\ ;\ c/\alpha\}$$

Outro conjunto de três proposições foi feito e seja ele representado por Y

$$Y = \{a/\beta\ ;\ b/\gamma\ ;\ c/\gamma\}$$

Então, por exemplo, a intersecção será:

$$X \cap Y = \{a/\beta\ ;\ b/\gamma\ ;\ c/\gamma\}$$

A creditibilidade da conjunção das proposições $(X \cap Y)$ é efectivamente muito pequena. A não ser *a* que fala uma vez parcialmente verdade no conjunto $(X \cap Y)$, *b* e *c* falam falso e daí a declaração que a conjunção dos dois conjuntos de proposições feitas pelos três indivíduos é «praticamente falsa».

Já a reunião se apresentaria de outra forma:

$$X \cup Y = \{a/\alpha\ ;\ b/\gamma\ ;\ c/\alpha\}$$

Pode estabelecer-se um paralelo entre este exemplo e a situação de um exame onde:

Na visão $(X \cap Y)$ o que se procura são os *erros* (falsidades).

Na visão $(X \cup Y)$ o que se procura são as coisas *certas* (verdades).

Os exemplos apresentados mostram que há vasta cópia de situações reais onde se afiguram mais ajustadas as imagens projectadas em «conjuntos vagos» do que em conjuntos vulgares.

Os exemplos apontam para o seguinte esquema de construção dos «conjuntos vagos»:

1. Um conjunto referencial U (conjunto vulgar);
2. Um outro conjunto ordenado Ω onde se projectam as imagens dos elementos de U por meio de:
3. Uma injecção funcional J, ou seja $UJ\Omega$ donde

   $J(x \in U) = (\alpha \in \Omega)$;
4. Cada conjunto vago é descrito por meio de um J que lhe é próprio.

Tem interesse reconhecer U, J, Ω nos vários exemplos apresentados anteriormente:

1.º Exemplo

$U = \{a_1, a_2, \ldots\}$ os objectos do laboratório;

$\Omega = [0,1]$ percentagem de radiação verde;

o conjunto [0,1] é ordenado como se requere para Ω.

Para X_v temos:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = J_v\ (a_1) \\ v_2 = Jv\ (a_2) \end{array}\right\} \text{espectrografo}$$

.....

Para X_e temos:

$$\left.\begin{array}{l} e_1 = J_e\ (a_1) \\ e_2 = J_e\ (a_2) \end{array}\right\} \text{balança}$$

.....

2.º Exemplo

$U = \{a, b, c\}$ caixas de 100 parafusos

$$\Omega = \left\{ \frac{0}{100}, \frac{1}{100}, \ldots \frac{100}{100} \right\}$$

percentagem de parafusos tomados.

Para X temos:

$$0{,}2 = J_x\ (a)$$
$$0{,}3 = J_x\ (b)$$
$$0{,}0 = J_x\ (c)$$

para Y temos: $0{,}05 = J_y(a)$

$0{,}07 = J_y(b)$

$0{,}10 = J_y(c)$

3.º Exemplo

$U = \{a, b, c\}$

$\Omega = [0,1]$

Para A temos: $0{,}9 = J_A(a)$

$0{,}7 = J_A(b)$

$0{,}01 = J_A(c)$

Para B temos: $0{,}8 = J_B(a)$

$0{,}01 = J_B(b)$

$0{,}01 = J_B(c)$

Para $A \cap B$ temos: $0{,}8 = J_{A \cap B}(a)$

$0{,}01 = J_{A \cap B}(b)$

$0{,}01 = J_{A \cap B}(c)$

O animal *a* (leão) é o que toma maior relevo porque tem a dupla propriedade de «atacar o homem» e de «morder»

4.º Exemplo

O conjunto universal U é o produto cartesiano de {a, b, c, d} e {Ag, Te, Ar} ou seja:

(a, Ag), (a, Te), (a, Ar)

(b, Ag), (b, Te), (b, Ar)

(c, Ag), (c, Te), (c, Ar)

(d, Ag), (d, Te), (d, Ar)

Assim, Card (U) = 4×3 = 12

$\Omega = [0,1]$ é o conjunto onde se projectam as imagens.

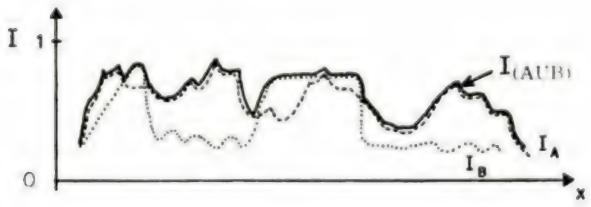
5.º Exemplo

As funções

$I_A = I_A(x)$

$I_B = I_B(x)$

com $I \in [0,1]$, são as funções que caracterizam respectivamente os conjuntos A e B.



6.º Exemplo

O conjunto universal é

$U = \{a, b, c\}$

$\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma\} \qquad (\alpha \geq \beta \geq \gamma)$

isto é, Ω é um conjunto ordenado por $\geq$, significando

$J(M) \geq J(N)$

que *M* falou mais verdade do que *N*

$$J_x \Rightarrow \begin{cases} J_x(a) = \alpha \\ J_x(b) = \gamma \\ J_x(c) = \alpha \end{cases} \qquad J_y \Rightarrow \begin{cases} J_y(a) = \beta \\ J_y(b) = \gamma \\ J_y(c) = \gamma \end{cases}$$

2.º CAPÍTULO

CONJUNTOS VAGOS; SUA FORMALIZAÇÃO

2.1 — INTRODUÇÃO

Os «conjuntos vagos» constituem uma extensão ao conceito de «conjunto».

Ao expor-se a teoria dos «conjuntos vagos» supõem-se esclarecidos os seguintes temas:

— A Teoria dos Conjuntos (vulgares), bem como as teorias e conceitos dela decorrentes;

— Os motivos semanticos que conduziram à necessidade de estender o conceito de conjunto vulgar foram já expostos no Cap. I;

— A teoria dos conjuntos vagos deve incluir como caso particular a teoria dos conjuntos vulgares.

2.2 — SIMBOLOGIA

a) Quanto à simbologia oferece-se uma alternativa:

ou os conjuntos vagos vêem afectados de um indicativo os símbolos que os representam, como por exemplo, em vez de A, B, X teríamos $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$, $\underset{\sim}{X}$ para significar que os conjuntos A, B, X são vagos;

ou se faz o inverso, os símbolos dos conjuntos que não são vagos, por se tratarem de conjuntos vulgares, vêem os símbolos respectivos afectados de um indicativo, como, por exemplo, $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{X}$.

Porque o conjunto vulgar é um caso particular de conjunto vago, as expressões e fórmulas aplicáveis a conjuntos vagos também são verdadeiras para conjuntos vulgares, e daí que se uma preposição ou frase só for válida para conjuntos vulgares se anotará esse facto sublinhando com um traço os símbolos respectivos.

b) Quanto a símbolos usaremos os seguintes:

Símbolos latinos:

Letras maiúsculas para representar referênciais (conjuntos referenciais) e dum modo geral conjuntos que podem ser indistintamente vagos ou vulgares;

Letras minúsculas para representar elementos de conjuntos (os elementos nunca são sublinhados porque não são conjuntos).

Símbolos gregos:

Letras maiúsculas simbolizam referenciais ou conjuntos vulgares apenas;

Letras minúsculas simbolizam elementos.

Símbolos góticos:

Segue-se um procedimento idêntico ao dos símbolos gregos.

Em geral, a diferença entre letras góticas e gregas está no seguinte:

Letras *gregas* servem para descrever simbolicamente *reticulados* e seus elementos.

Letras *góticas* para representar conjuntos referenciais (vulgares) e seus elementos.

Finalmente, usar-se-ão mas raramente os símbolos colocados inferiormente ($\sim$) e ($-$) para significar *expressamente* que certa letra representa um conjunto vago ou vulgar (como por exemplo A ou $\underset{\sim}{A}$).

2.3 — DEFINIÇÃO DE CONJUNTO VAGO

Sejam dados:

— Um conjunto-referencial, não vazio, $\mathfrak{U}$. Este conjunto é *vulgar*.

— Um reticulado (vulgar) $\{\Omega, \Delta, \nabla\}$ onde Ω é um conjunto vulgar com dois ou mais elementos e Δ, ∇, são duas operações internas, fechadas, comutativas, associativas, existindo e sendo únicos um supremo e um ínfimo, idempotentes e absorventes. (Veja-se anexo 2).
Podem ainda gozar de mais propriedades nomeadamente: complementaridade e distributividade, e aplicarem-se os teoremas de Morgan.

— O conjunto Γ das aplicações (funcionais) de $\mathfrak{U}$ em Ω, isto é, $\Gamma = \Omega^{\mathfrak{U}}$. A cada aplicação $\Gamma \in \Gamma$, dá-se o nome de «caracterizante» ou «função de aparentamento» ou ainda «função de pertença».

— Define-se «Sub-conjunto Vago» A do referencial $\mathfrak{U}$, ao grafo Γ_A duma aplicação funcional de $\mathfrak{U}$ em Ω.

Assim teremos:

$\Gamma_A \in \Gamma$ • também $\Gamma_A \in \mathfrak{U} \times \Omega$ e se $\alpha_i = \Gamma_A(u_i)$

onde: $\begin{cases} u_i \in \mathfrak{U} \\ \alpha_i \in \Omega \end{cases}$ e $i \in \{1, \ldots, \text{Card}\,\mathfrak{U}\}$

então:

$$\Gamma_A = [u_1/\alpha_1;\ u_2/\alpha_2;\ \ldots\ldots]$$

Γ_A será o *caracterizante do conjunto vago A*.

A *função semântica* do caracterizante é fazer corresponder a cada elemento $u_i \in \mathfrak{U}$ um (e só um) elemento $\alpha_i \in \Omega$.

Deste modo toda a informação a respeito de A está contida em Γ_A, e daí a designação de caracterizante.

O modo de escrever frases com os símbolos operatórios definidos no reticulado Ω é do conhecimento e âmbito da Teoria de conjuntos e é recordado no *Anexo 2*.

Aqui limita-se a uma apresentação de algumas expressões, a título de exemplo:

$\nabla(\alpha, \beta)$ também se escreve $\alpha \nabla \beta$

$\nabla(\alpha, (\beta \nabla \gamma))$ também se escreve $\nabla(\alpha, \beta, \alpha)$ ou $\alpha \nabla \beta \nabla \alpha$

Quanto ao símbolo Δ procede-se dum método idêntico.

As propriedades das operações ∇, Δ bem como d'outras ψ ou $\dot{\psi}$ encontram-se revistas no referido Anexo 2.

2.4 — DEFINIÇÃO DE ALGUNS SIMBOLOS

Pertencer ($\in$)

Se for A um sub-conjunto de $\mathfrak{U}$ e Γ_A o respectivo caracterizante e se u_i for um elemento de $\mathfrak{U}$ então:

$u_i \in A$ se e só se $\Gamma_A(u_i) \neq 0$, caso contrário u não pertence a A e escrever-se-á $u_i \notin A$.

Estar Contido ($\subset$) ou ($\sqsubset$)

Sejam dados dois sub-conjuntos A e B de $\mathfrak{U}$; o sub-conjunto A *está contido* no sub-conjunto B e escreve-se $A \subset B$ se:

$$\forall u_i \in \mathfrak{U} : [\Gamma_A(u_i) \nabla \Gamma_B(u_i) = \Gamma_B(u_i)] \wedge$$
$$\wedge [\Gamma_A(u_i) \Delta \Gamma_B(u_i) = \Gamma_A(u_i)]$$

Uma forma mais fraca poderá ser definida e simbolizada por $A \subseteq B$ quando for:

$$\forall u_i \in \mathfrak{U} : [\Gamma_A(u_i) \nabla \Gamma_B(u_i) = \Gamma_B(u_i)] \vee$$
$$\vee [\Gamma_A(u_i) \Delta \Gamma_B(u_i) = \Gamma_A(u_i)]$$

Finalmente é fácil de ver que $A \subset \mathfrak{U}$ e $A \sqsubset \mathfrak{U}$.

Igualdade ($=$)

$A = B$ dizem-se conjuntos iguais se $\forall u_i \in \mathfrak{U}$ for

NOTA: em francês diz-se «appartenance» e na literatura inglesa «member Slip».

NOTA: Para reduzir a extensão da expressão «Sub-conjunto Vago», diz-se «Conjunto Vago» ou «C. Vago» ou até «Conjunto» se tal não introduzir ambiguidade.

$$\Gamma_A(u_i) = \Gamma_B(u_i).$$

Conjunto Vazio ($\varnothing$)

O conjunto definido como segue:

$\forall u_i \in \mathcal{U}$: $\Gamma(u_i) = 0$, onde 0 é elemento ínfimo de Ω, diz-se *conjunto vazio* e simboliza-se por $\varnothing$.

União (U)

O conjunto $C = A \cup B$ define-se como segue:

$$\Gamma_C = \Gamma_{A \cup B} = \Gamma_A \nabla \Gamma_B$$

onde: $A, B, C \subset \mathcal{U}$

Γ_A, Γ_B e Γ_C os respectivos caracterizantes.

Intersecção ($\cap$)

Dum modo idêntico:

$$C = A \cap B \quad \text{se} \quad \Gamma_C = \Gamma_{A \cap B} = \Gamma_A \Delta \Gamma_B$$

2.5 — PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES U e $\cap$

As principais propriedades são:

a) *Fechadas* e *unicidade*

$$\forall A \text{ e } B \subset \mathcal{U}: \begin{cases} A \cup B = C \subseteq \mathcal{U} \\ A \cap B = D \subseteq \mathcal{U} \end{cases}$$

C e D são únicos.

b) *Comutativas:*

$$A \text{ e } B \subseteq \mathcal{U} \text{ será } \begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$$

c) *Associativas:*

$$\forall A, B \text{ e } C \subseteq \mathcal{U} \quad \text{será} \begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{cases}$$

d) Operações com os *conjuntos* $\mathcal{U}$ e $\varnothing$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U} \cap A = A \\ \mathcal{U} \cup A = \mathcal{U} \end{array} \right\}, \ \forall A \subseteq \mathcal{U}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varnothing \cap A = \varnothing \\ \varnothing \cup A = A \end{array} \right\}, \ \forall A \subseteq \mathcal{U}$$

e) *Idempotência:*

$$\forall A \subseteq \mathcal{U}; \begin{cases} A \cup A = A \\ A \cap A = A \end{cases}$$

f) *Absorventes:*

$$\forall A \text{ e } B \subseteq \mathcal{U}; \begin{cases} A \cap (A \cup B) = A \\ A \cup (A \cap B) = A \end{cases}$$

As propriedades a) a f) dos operadores U e $\cap$ resultam directamente das propriedades correspondentes de Γ_A e $\Gamma_B \in \Omega$; reticulado onde as operações internas ∇ e Δ nele definidas têem propriedades equivalentes:

∇ e Δ são operações fechadas, únicas, comutativas, associativas, os elementos O e V existem e são únicos e têm propriedades correspondentes a $\varnothing$ e $\mathcal{U}$, idempotência e absorventes.

g) *Distributividade:*

Se o reticulado (Ω, ∇, Δ) for *distributivo*, pode ainda ser:

$$\forall A, B \text{ e } C \subseteq \mathcal{U}: \begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

Resulta directamente da distributividade do reticulado.

h) *Complementariedade:*

Se o reticulado (Ω, ∇, Δ) for complementarizado, pode fazer-se $\forall A \subseteq \mathcal{U}$ corresponder a um outro conjunto $B \subseteq \mathcal{U}$ tal que:

$$(A \cup B = \mathcal{U}) \wedge (A \cap B = \varnothing)$$

e B é *único* e represnta-se por $\bar{A}$. Com efeito: Se $\Gamma_A = \alpha$ e $\Gamma_B = \bar{\alpha}$ $\quad \Gamma_{(A \cup B)} = \Gamma_A \nabla \Gamma_B = \alpha \nabla \bar{\alpha} = V = \Gamma_u$

$$\Gamma_{(A \cap B)} = \Gamma_A \Delta \Gamma_B = \alpha \Delta \bar{\alpha} = 0 = \Gamma_\varnothing$$

Donde $A \cup B = \mathcal{U}$ $\qquad$ onde $B = \bar{A}$

$A \cap B = \varnothing$

Porque $\overline{(\bar{\alpha})} = \alpha$ $\qquad \bar{B} = \overline{(\bar{A})}$

2.6 — CONJUNTOS VULGARES

Convém provar que é possível definir um conjunto vulgar usando o formalismo dos c. vagos.

Seja dado o reticulado de Bool (vër anexo 2): $(\{0,1\}, \dagger, \psi)$ o conjunto de Bool só tem dois elementos 0 e 1 ou seja O e V.

Os operadores $\dagger$ ψ têem as propriedades usuais deste tipo de reticulados; nomeadamente:

$$\begin{array}{lcl} \psi(0,0) = 0 & & \dagger(0,0) = 0 \\ \psi(0,1) = 1 & & \dagger(0,1) = 0 \\ \psi(1,0) = 1 & \text{e} & \dagger(1,0) = 0 \\ \psi(1,1) = 1 & & \dagger(1,1) = 1 \end{array}$$

o reticulado de Bool é *complementado* e $\begin{cases} \bar{0} = 1 \\ \bar{1} = 0 \end{cases}$

e *distributivo*, por exemplo:

$$0 \vee (1 \wedge 0) = (0 \vee 1) \wedge (0 \vee 0) = 1 \wedge 0 = 0$$

Qualquer conjunto vulgar $\underline{A} \subseteq \mathcal{U}$ tem por caracterizante Γ_A que toma valores em $\{0,1\}$ e é usual fazer a seguinte correspondência: Se

$$\begin{cases} (x \in \underline{A}) \longleftrightarrow \Gamma_{\underline{A}}(x) = 1 \\ (x \notin \underline{A}) \longleftrightarrow \Gamma_{\underline{A}}(x) = 0 \end{cases}$$

ora esta regra é a usada para construir a «indicatriz» dum conjunto vulgar $\underline{A} \subseteq \mathcal{U}$.

O caracterizante dum conjunto $\underline{A}$ que usa o reticulado de Bool é afinal a *indicatriz* do conjunto A vulgar.

Assim os conjuntos vulgares são um caso particular dos conjuntos vagos.

2.7 — RETICULADOS ZADEH

Os conjuntos vagos podem ser descritos em variados reticulados mas o reticulado onde $\Omega = [0,1]$ e os operadores são ψ e $\dot{\wedge}$ (máximo de... e mínimo de...) é tão fundamental na teoria dos conjuntos vagos que convém reproduzir os principais resultados.

Reticulado de Zadeh ($[0,1]$, ψ, $\dot{\wedge}$) tem as propriedades descritas no anexo 2, e que se recapitulam:

— Operações são fechadas e únicas;

— Comutativas;

— Associativas;

— O supremo é 1 e o ínfimo é 0;

— Idempotente;

— Absorvente;

— Pseudo complementado.

Os conjuntos vagos do referencial $\mathcal{U}$ construídos com um reticulado de Zadeh como conjunto onde os caracterizantes tomam valores, gozam das seguintes propriedades:

Se A, B e $C \subseteq \mathcal{U}$ então, os operadores $\cap$ e $\cup$ têm as seguintes propriedades:

1) $A \cap B = C \subseteq \mathcal{U}$ — *fechada*
$A \cup B = C' \subseteq \mathcal{U}$ — C e C' são únicos.

2) $A \cap B = B \cap A$ — *Comutatividade*
$A \cup B = B \cup A$

3) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ — *Associatividade*
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

4) $A \cup A = A$ — *Idempotência*
$A \cap A = A$

5) Operações com $\varnothing$ e $\mathcal{U}$:

$$\begin{cases} \varnothing \cup A = A \\ \varnothing \cap A = \varnothing \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathcal{U} \cup A = \mathcal{U} \\ \mathcal{U} \cap A = A \end{cases}$$

6) *Destributividade*

$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

Convém mostrar que assim é,

$\Gamma_{(B \cap C)} = \Gamma_B \dot{\wedge} \Gamma_C$ e $\Gamma_{A \cup (B \cap C)} = \Gamma_A \psi (\Gamma_B \dot{\wedge} \Gamma_C)$

$\Gamma_{(A \cup B)} = \Gamma_A \psi \Gamma_B$

$\Gamma_{(A \cup C)} = \Gamma_A \psi \Gamma_C$

mas $\Gamma_A \psi (\Gamma_B \dot{\wedge} \Gamma_C) = (\Gamma_A \psi \Gamma_B) \dot{\wedge} (\Gamma_A \psi \Gamma_C)$

7) *Pseudo-Complementado*

$\tilde{(\tilde{A})} = A$ $\quad \Gamma_{\tilde{A}} = 1 - \Gamma_A$ donde $\Gamma_{\tilde{(\tilde{A})}} = 1 - (1 - \Gamma_A) = \Gamma_A$

8) *Teoremas de Morgan*

$$\begin{cases} \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \\ \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \end{cases}$$

também é fácil de verificar que estes teoremas se aplicam.

Tem interesse ainda apresentar dois operadores ($\pm$) e ($\dot{-}$), soma disjuntiva e producto que têem aplicação frequente nestes conjuntos vagos que empregam na sua definição o conjunto reticulado de Zadeh.

$$A \pm B \Rightarrow \Gamma_A \pm \Gamma_B = \Gamma_A + \Gamma_B - \Gamma_A \cdot \Gamma_B$$

onde $+$ é o símbolo de soma vulgar, e $\bullet$ é o símbolo do producto vulgar.

$$A \dot{-} B \Rightarrow \Gamma_A \dot{-} \Gamma_B = \Gamma_A \cdot \Gamma_B \text{ (producto vulgar)}$$

é fácil de ver que;
são operações *fechadas* e *únicas*.

$$\left.\begin{array}{l} A \pm B = B \pm A \\ A \dot{-} B = B \dot{-} A \end{array}\right\} \text{— Comutativas}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \pm (B \pm C) = (A \pm B) \pm C \\ A \dot{-} (B \dot{-} C) = (A \dot{-} B) \dot{-} C \end{array}\right\} \text{— Associativas}$$

$$\begin{cases} A \pm \varnothing = A \text{ isto é, } \varnothing \text{ é o elemento neutro } (\pm). \\ A \dot{-} \varnothing = \varnothing \text{ isto é, } \varnothing \text{ é absorvente de } (\dot{-}). \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \pm \mathcal{U} = \mathcal{U} \\ A \dot{-} \mathcal{U} = A \end{cases}$$

$\bar{(\bar{A})} = A$ involução.

$$\left.\begin{cases} \overline{A \dot{-} B} = \bar{A} \pm \bar{B} \\ \overline{A \pm B} = \bar{A} \dot{-} \bar{B} \end{cases}\right\} > \text{Teoremas de Morgan}$$

3.º CAPÍTULO

DESENVOLVIMENTO DA TEORIA DOS SUB-CONJUNTOS VAGOS

3.1 — CONCEITO DE DISTÂNCIA ENTRE CONJUNTOS

a) seja dado um referencial $\mathcal{U}$, um reticulado $(\Omega, \wedge, \Delta)$, o conjunto das aplicações funcionais de $\mathcal{U}$ em $\Omega\ \Gamma \equiv \Omega^{\mathcal{U}}$ e dois conjuntos vagos A e $B \subseteq \mathcal{U}$ cujos caracterizantes são Γ_A e $\Gamma_B \in \Omega^{\mathcal{U}}$.

Para definir uma distância D entre A e B é necessário que D satisfaça aos seguintes requisitos:

$$D(\Gamma_A, \Gamma_B) \in R^+$$

1) $D(\Gamma_A, \Gamma_B) \geqslant 0$

2) $D(\Gamma_A, \Gamma_B) = D(\Gamma_B, \Gamma_A)$

3) $D(\Gamma_A, \Gamma_B) = 0 \Leftrightarrow \Gamma_A = \Gamma_B$

b) *Distância normalizada a 1*

É possível a partir de D definir uma outra distância d normalizada a 1.

Para tanto defina-se $\underline{\overline{D}}$ da forma seguinte:

$$\underline{\overline{D}} = \underset{x \in \mathcal{U}}{\text{Max.}}\ D(\Gamma_A(x), \Gamma_B(x))$$

então:

$$d(\Gamma_A, \Gamma_B) = \frac{D(\Gamma_A, \Gamma_B)}{\underline{\overline{D}}}$$

c) *Distância normalizada a 1 numa classe de conjuntos*

Seja dada a classe C de conjuntos

$$C = \{A_1, A_2 \ldots An\},\ {}_i\ A_i \subseteq \mathcal{U}$$

Seja $\underline{\overline{D}}_{ij} = \underset{x \in \mathcal{U}}{\text{Máx.}}\ (A_i, A_j)$

e $\underline{\overline{\delta}} = \underset{i\,j}{\text{Máx}}\ \underline{\overline{D}}_{ij}$

então

$$\delta\ (\Gamma_A, \Gamma_B) = \frac{D(\Gamma_A, \Gamma_B)}{\underline{\overline{\delta}}}$$

d) *Forma genérica de definir uma distância*

Seja $\Delta(x)$ uma distância eventualmente normalizada a 1 e definida em relação a $\Gamma_A(x)$ e $\Gamma_B(x)$ isto é

$$\Delta(x) = \Delta(\Gamma_A(x), \Gamma_B(x)) \qquad x \in \mathcal{U}$$

$$\Delta_{AB} = \frac{1}{\text{Card}\ \mathcal{U}} \sum_{x \in \mathcal{U}} \Delta(x) \qquad \text{para Card } \mathcal{U} \text{ finito}$$

É fácil de ver que se $\Delta(x)$ for uma distância normalizada a 1, Δ_{AB} será igualmente uma distância normalizada a 1.

Se Card $\mathcal{U}$ for contínuo pode igualmente definir-se uma distância porém *não normalizável*, da forma seguinte:

$$\Delta_{AB} = \int_{x \in \mathcal{U}} \Delta(x) \cdot dx$$

Identicamente para Card $\mathcal{U} = \infty$, pode definir-se

$$\Delta_{AB} = \sum_{x \in \mathcal{U}} \Delta x$$

e) *Distância entre famílias de Conjuntos Vagos*

Seja $\mathcal{U}$ uma família de θ (finito) conjuntos $\mathcal{U}_i$.

A cada conjunto $\mathcal{U}_i$, corresponderá o seu reticulado $(\Omega_i \vee, \Delta)$, em geral distinto, e respectivo conjunto de aplicações funcionais $\Gamma_i \equiv \Omega_i^{\mathcal{U}_i}$.

Defina-se em cada $\mathcal{U}_i$ uma distância eventualmente normalizada a 1, Δ_i.

Sejam A e $B \subseteq \mathcal{U}$ duas famílias de conjuntos onde:

$$\forall_i\ A_i \subseteq \mathcal{U}_i \quad \text{e} \quad \forall_i\ B_i \subseteq \mathcal{U}_i$$

$$\Delta_{A,B} = \Delta\ \{A_1, A_2 \ldots\}, \{B_1, B_2 \ldots\} =$$

$$= \frac{1}{\theta} \sum_i \Delta\ A_i\ B_i \qquad \theta = \text{Card } \mathcal{U}$$

Se θ for infinito, ou $\mathcal{U}$ um contínuo, poderá definir-se respectivamente:

$$\int \Delta\ A_i\ B_i\ (x)dx \quad \text{e} \quad \sum_i \Delta\ A_i\ B_i$$

f) *Alguns exemplos de distâncias*

Distância de Hamming, aplica-se a um reticulado de Zadeh $\equiv ([0,1], \psi\ \dot{\uparrow})$.

$$\Delta(x) = \left| \Gamma_A(x) - \Gamma_B(x) \right|$$

$$\text{e} \quad \Delta_{AB} = \frac{\sum_{x \in \mathcal{U}} \Delta(x)}{\text{Card } \mathcal{U}} \qquad \text{Card } \mathcal{U} \text{ finito}$$

é fácil de verificar que se trata duma distância normalizada a 1.

Também se definem distâncias de Hamming não normalizadas pela expressão:

$$\Delta_{AB} = \sum_{x \in \mathcal{U}} \Delta(x)$$

e no caso de $\mathcal{U}$ ser contínuo será:

$$\Delta_{AB} = \int_{x \in \mathcal{U}} \Delta(x) \bullet dx$$

que não é uma distância normalizada.

Distância quadrática

Igualmente definida no reticulado de Zadeh

$$D(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\Gamma_A(x_i) - \Gamma_B(x_i) \right)^2}$$

$$e \quad \Delta(A\,B) = \frac{D(A, B)}{\sqrt{n}}$$

no contínuo

$$D(A, B) = \sqrt{\int_{x \in \mathcal{U}} \left(\Gamma_A(x_i) - \Gamma_B(x_i) \right)^2 dx}$$

É fácil de provar, aplicação directa, que todas as distâncias apresentadas satisfazem às condições que permitem declará-las como tal.

3.2) *Conjuntos vulgares de nível α*

Este conceito aplica-se a Conjuntos Vagos cujo reticulado é o de Zadeh. Sendo dado um conjunto vago A, define-se conjunto vulgar de nível α, e simboliza-se $\underline{A}_\alpha$, o conjunto cujos elementos $x \in U$ satisfazem a seguinte regra:

$$x \in \underline{A}_\alpha \text{ se } \Gamma_A(x) \geqslant \alpha \in [0,1]$$

ou lançando mão de indicatriz de $A\alpha$ será

$$\begin{cases} \Gamma_{\underline{A}_\alpha}(x) = 1 & \text{se } \Gamma_A(x) \leqslant \alpha \\ \Gamma_{\underline{A}_\alpha}(x) = 0 & \text{se } \Gamma_A(x) \leqslant \alpha \end{cases}$$

Quando $\alpha = 0{,}5$, diz-se de $A_{0,5}$ que é o conjunto vulgar *«mais próximo»* do conjunto vago A.

3.3) *Índice de Vago*

O conceito de «Conjunto Vulgar mais próximo» permite introduzir a noção de *índice vago* para medir a *«distância»* do *conjunto vago* ao *conjunto vulgar mais próximo*.

Assim, o índice de vago pode ter as seguintes definições:

$$n = \text{Card}\,\mathcal{U} \begin{cases} I(A) = \dfrac{2}{n}\, d(A, A_{0,50}) & \text{Hamming} \\ I^*(A) = \dfrac{2}{\sqrt{n}}\, d(A, A_{0,50}) & \text{Quadrática} \end{cases}$$

$$N = \text{Card}\,(A \times \bar{A}) \quad I^{\#}(A) = \frac{4}{N} \sum_{i=1}^{N} \Gamma_{(A \times \bar{A})}(x_i)$$

Admite-se que o reticulado é de Zadeh mas podem definir-se índices semelhantes imaginados para outros reticulados.

3.4) *Decomposição e recomposição*

Decomposição de um conjunto vago:

Seja dado um conjunto vago A, cujo caracterizante é $\Gamma_A(x) \in \Omega^{\mathcal{U}}$, $x \in \mathcal{U}$ e Card$\mathcal{U}$ = n (finito). Seja, dum modo geral, $\underline{A}_{\alpha i}$ o conjunto vulgar de nível α_i e $\alpha_i = \Gamma_A(x_i)$ com $x_i \subseteq \mathcal{U}$. Os conjuntos vulgares de níveis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ representam a decomposição do conjunto vago A, nomeadamente $\underline{A}_{\alpha_1}, \underline{A}_{\alpha_2}, \ldots \underline{A}_{\alpha_n}$.

A operação inversa designa-se de *recomposição* ou *composição*.

Para o efeito faça-se:

$$\forall x_i \in \mathcal{U} \rightarrow \Gamma_A(x_i) = \alpha_i \quad \Gamma_{\underline{A}_{\alpha i}}(x_k)$$

onde:

$$\Gamma_{\underline{A}_{\alpha i}}(x_g) \nabla \Gamma_{\underline{A}_{\alpha i}}(x_k) = \Gamma_{\underline{A}_{\alpha i}}(x_g)$$

$$\forall x_k \in \mathcal{U}$$

Na verdade, para $\alpha \neq 0$ $\Gamma_{\underline{A}_{\alpha i}}$ tem pelo menos um elemento igual a 1, pois trata-se de um conjunto vulgar obtido de A e de nível α.

3.5) *Conjuntos vagos potentes (ou das partes)*

Sejam os conjuntos:

referencial $\mathcal{U}$

reticulado (Ω, ∇, Δ)

O conjunto das partes de $\mathcal{U}$, simbolizado $P(\mathcal{U})$, tem $2^{\text{Card}\,\mathcal{U}}$ elementos.

A generalização para conjuntos vagos introduz o Card Ω, que, em geral, é maior ou igual a 2 e teremos:

$$(\text{Card}\,\Omega)^{\text{Card}\,\mathcal{U}} = \text{Card}\,P(\mathcal{U})$$

$P(\mathcal{U})$ poderá ser simbolizado também desta forma: $\Omega^{\mathcal{U}}$ e então Card $\Omega^{\mathcal{U}} = (\text{Card}\,\Omega)^{\text{Card}\,\mathcal{U}}$.

As propriedades do reticulado (Ω, ∇, Δ) induzem propriedades em $\Omega^{\mathcal{U}}$. Seja então dado o reticulado (Ω, ∇, Δ)

e os conjuntos vagos C, A, B, D $\subseteq \mathcal{U}$ (ou C, A, B, D $\in \Omega^{\mathcal{U}}$).

Ora o reticulado $(\Omega, \vee, \Delta)$ permitiu introduzir as operações U e $\cap$ (e eventualmente—) de forma que:

$$\begin{matrix} A \cup B = C \\ A \cap B = D \end{matrix} \quad \text{onde } C \text{ e } D \subseteq \mathcal{U}$$

então; duas operações internas foram definidas em $\Omega^{\mathcal{U}}$

$$(\Omega^{\mathcal{U}}, \cap, \cup)$$

e se A, B, forem elementos de $\Omega^{\mathcal{U}}$, então teremos:

$$A \cup B = C \in \Omega^{\mathcal{U}}$$
$$A \cup B = D \in \Omega^{\mathcal{U}}$$

é fácil de ver que essas operações U e $\cap$ são:

Fechadas e únicas.

Associativas;

Comutativas;

Idempotentes;

etc, etc.

Pode dizer-se que as operações $\vee$ e Δ definidas em Ω *induziram* as operações U e $\cap$ em $\Omega^{\mathcal{U}}$

4.º CAPÍTULO

RELAÇÕES VAGAS

4.1 — INTRODUÇÃO

As relações usuais entre dois conjuntos referenciais dados $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$, definem-se por meio dum conjunto $R \subseteq \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$. A extensão deste conceito a *Relações Vagas* é imediato e basta definir um reticulado $(\Omega, \vee, \Delta)$ e aplicar (funcionalmente) o conjunto $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ em Ω. Se simbolizarmos por J o conjunto de todas as aplicações (funcionais) de $\mathcal{U}$ em Ω, uma dada relação vaga RA será descrita como um conjunto vago de $\mathcal{U}$ cujo caracteritante é J_A (u) onde

$$\begin{cases} u \in \mathcal{U} \\ J_A(u) \in \Omega \end{cases}$$

o conjunto vago A será designado como o *grafo* da relação vaga R_A.

A simbologia que será adoptada é a seguinte:

J — Símbolo geral dos caracterizantes dos grafos das Relações;

R — Símbolo das relações;

A,B ... P, Q etc. — símbolos que especificam a relação ou o caracterizante, e simultaneamente é símbolo do grafo da relação.

A generalização deste conceito a productos cartesianos de mais de dois conjuntos é imidiata, basta para efeito definir

$$\mathcal{U} = \mathop{\times}_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i$$

e J será o conjunto (ou família) de todas as aplicações de $\mathcal{U}$ em Ω sendo Ω um reticulado.

4.2 — DEFINIÇÕES DE TERMOS RELACIONADOS COM AS RELAÇÕES VAGAS.

a) *1.ª Projecção duma relação $J_A(x, y)$* com $x \in \mathcal{U}_1$, $y \in \mathcal{U}_2$ e $J_A \in J$ onde J é a família das aplicações de $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ em Ω e Ω é um reticulado $(\Omega, \vee, \Delta)$.

$$J_A^1(x) = \underset{y}{\vee} J_A(x, y)$$

significando $\underset{y}{\vee}$ a aplicação da operação $\vee$, defenida no reticulado, e estendida a todos $J_A(x, y)$ para um dado x, isto é, estendida a todos os pares que de comum tenham o mesmo x.

b) *2.ª Projecção duma relação $J_A(x, y)$.*

Nas condições referidas em a) será dada por:

$$J_A^1(y) = \underset{x}{\vee} J_A(x, y)$$

c) *2.ª Projecção da 1.ª projecção*

Será, identicamente definida como sendo:

$$J_A^{12} = \underset{x}{\vee} \underset{y}{\vee} J_A(x, y)$$

d) *1.ª Projecção da 2.ª projecção*

Será definida de forma semelhante:

$$J_A^{21} = \underset{y}{\vee} \underset{x}{\vee} J_A(x, y)$$

Porque as operações $\vee$ são comutativas, será:

$$J_A^{21} = J_A^{12}$$

e) *Suporte de uma Relação Vaga R_A*

É o *conjunto vulgar* $\underline{A}$ cujo caracterizante

$$\begin{cases} J_{\underline{A}} = 1 \text{ se } J_A > 0 \\ J_{\underline{A}} = 0 \text{ se } J_A = 0 \end{cases}$$

f) *Relação Inversa*

Sejam dados: dois conjuntos universais X e Y e formam-se os productos cartesianos:

$$\mathcal{U} = Y \times X$$
$$\mathcal{U}^{-1} = X \times Y$$

e dois sub-conjuntos vagos, $A \subseteq \mathcal{U}$ e $B \subseteq \mathcal{U}^{-1}$, cujos caracterizantes respectivos são:

$$J_A\ (x, y) \in \Omega \qquad\qquad \begin{cases} x \in X \\ y \in Y \end{cases}$$
$$J_B\ (y, x) \in \Omega \qquad e$$

R_B é a *relação inversa* de R_A se $J_B(y, x) = J_A\ (x, y)$, para $\begin{cases} \forall\ x \in X \\ \forall\ y \in Y \end{cases}$ simboliza-se R_B por R_A^{-1}.

É fácil de verificar que a matriz $[J_B] = [J_A]^t$ e pode simbolizar-se este facto escrevendo $B = A^t$ porque

$$[J_B]^t = \{[J_A]^t\}^t = [J_A]$$

em virtude da dupla transposição das matrizes. Reproduzir a matriz de partida, será $(R_A^{-1})^{-1} = R_A$, isto é, a inversão goza de propriedade de *involução*.

Para tornar a simbologia mais leve faremos a seguinte correspondência de símbolos.

$$[J_A]^t \longleftrightarrow J_A^t$$

assim:

$$\{[J_A]^t\}^t \longleftrightarrow J_{[A^t]^t}$$

g) Introdução dos símbolos ($\subset$ U, $\cap$ —).

Uma vez feito o paralelo das Relações Vagas com o conceito dos conjuntos vagos todos os símbolos aplicáveis a estes, entendem-se mutatis mutandis àqueles.

O objectivo aqui é apenas recordar algumas fórmulas:

— *Continência* ($\subset$):

$$\text{Seja } \mathcal{U} = \mathop{\times}_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i \qquad e \begin{cases} u \in \mathcal{U} \\ A \text{ e } B \subseteq \mathcal{U} \end{cases}$$

$A \subset B$ se para $\forall u \in \mathcal{U}$ for:

$$\left[\nabla\ (J\quad (u), J_B\ (u)) = J_B(u)\right] \cap \left[\Delta(J_A(u), J_B(u) = J_A(u)\right]$$

— *União* (U):

$$\text{Se: } A \equiv \bigcup_{i=1}^{m} A_i \quad e \quad \forall_i\ A_i \subseteq \mathcal{U} \quad e \quad u \in \mathcal{U}$$

$$\text{então } J_A\ (u) = J_{\bigcup_{i=1}^{m} A_i}\ (u) = \nabla(J_{A_1}\ (u), \ldots, J_{A_m}\ (u))$$

— *Intersecção* ($\cap$)

$$\text{Se: } A \equiv \bigcap_{i=1}^{m} A_i \quad e \quad \forall_i\ A_i \subseteq \mathcal{U} \ e\ u \in \mathcal{U}$$

$$\text{então } J_A\ (u) = J_{\bigcap_{i=1}^{m}}\ (u) = \Delta\ (J_{A_1}\ (u), \ldots, J_{A_m}\ (u))$$

— *Complementação* (—)

Se o reticulado (Ω, ∇, Δ) for complementado então pode definir-se conjunto complementar dum conjunto vago $A \subseteq \mathcal{U}$ e será um conjunto $\bar{A}$ que goze das propriedades seguintes:

$J_{\bar{A}}\ \nabla\ J_A = V$ supremo do reticulado Ω

$J_{\bar{A}}\ \Delta\ J_A = O$ ínfimo do reticulado Ω

Donde:

$$\begin{cases} \bar{A} \cup A = \mathcal{U} \\ \bar{A} \cap A = \varnothing \end{cases}$$

Se um reticulado for complementado pode definir-se *soma disjuntiva:* $A + B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cup B)$.

h) *Introdução dos símbolos operatórios* $\oplus$, $\odot$ *e* — nos conjuntos vagos cujos reticulados forem os de Zadeh ([0,1], ψ, $\dot{\uparrow}$) e conceito de conjunto vulgar de nível α.

— *Soma de conjuntos* $\oplus$ (disjuntiva)

Seja: $A = \oplus [A_i]$ com $A_i \subseteq \mathcal{U}$ e $i = (1 \ldots p)$

então $J_A\ (u) = J_{\oplus\ i}\ (u) = \pm [J_{A_1}, \ldots, J_{A_p}]$

onde $\pm$ é a soma disjuntiva defenida como sendo:

$\alpha \pm \beta = \psi(\alpha, \beta) - \dot{\uparrow}\ (\alpha, \beta)$ onde $\alpha, \beta \in \Omega$

Veja-se anexo 2 para mais pormenores.

— *Producto de Conjuntos* $\odot$

Nas condições anteriores.

$$\odot_i\ [A_i] = A \qquad i = 1, \ldots p$$

então $J_A = J_{\odot\ (A_i)} = \div [J_{A_1}, \ldots, J_{A_p}]$

onde $\div$ é o producto vulgar dos J. contidos no parentese.

— *Pseudo-Complementação à Zadeh*

$\bar{A}$ é pseudo-complementar de A se for: $J_{\bar{A}} = 1 - J_A$, e goza da propriedade de *involução* $J_{\overline{\overline{(A)}}} = J_A$

i) *Conjuntos vulgares de nível* α

É o conjunto vulgar assim definido:

$$\underline{A}\alpha = \{u \in \mathcal{U} : J_A(u) \geqslant \alpha\} \qquad e \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$$

j) *Decomposição e Recomposição*

O que se disse sobre esta operação, aplica-se igualmente aos conjuntos que descreverem Relações

Vagas, usando como já se fez na definição de conjunto vulgar de nível α.

4.3 — COMPOSIÇÃO DE RELAÇÕES

a) *Introdução*

Esta operação entre *relações vulgares* é extremamente importante e por isso convém definir uma operação correspondente para *conjuntos vagos*.

Assim se $X R_A Y$ relaciona X com Y e $Y R_B Z$ relaciona Y com Z, qual será a relação $X R^* Z$ onde R^* (R_A e R_B)?

Só deverá depender de R_A e de R_B.

A *composição* simboliza-se por (o), assim $R^* = R_A \circ R_B$; em vez de R^* pode usar-se o símbolo $R_{A,B}$ e será $R_{A,B} = R_A \circ R_B$

Definição formal da composição:

Sejam dados os conjuntos universais X, Y e Z e formem-se os productos cartesianos

$$X \times Y = \mathcal{U}_1$$
$$Y \times Z = \mathcal{U}_2$$
$$X \times Z = \mathcal{U}_3$$

Seja dado por outro lado um reticulado (Ω, ∇, Δ) e sejam ainda:

J_1 a família das aplicações funcionais de $\mathcal{U}_1$ em Ω

J_2 idem de $\mathcal{U}_2$ em Ω

J_3 idem de $\mathcal{U}_3$ em Ω

Sejam dadas finalmente as relações R_A e R_B cujos caracterizantes J_A e J_B são membros respectivamente de J_1 e J_2.

Define-se a relação $R_{A,B} = R_A \circ R_B$ pelo conjunto contido em $\mathcal{U}_3$ cujo caracterizante $J_{A,B}$ é membro da família J_3 e cujo valor para o par $(x, z) \in \mathcal{U}_3$ genérico, é dado pela expressão:

$$J_{A.B}(x, z) = \nabla_y \, [\Delta(J_A(x, y), J_B(y, z))]$$

Tomam-se todos os $J_A(x, y)$, cujos pares têem por 1.º elemento x e todos os $J_B(y, z)$ cujos pares têem por 2.º elemento z formam-se os pares $J_A(x, y)$, $J_B(y, z)$ que têem o mesmo y, operam-se esses pares com o operador Δ e depois opera-se com o operador ∇ sobre os resultados anteriores.

Como o producto de duas matrizes é também uma *composição* de relações, a melhor mnemónica para realizar esta operação de composição de relações consiste em:

—Escrever $J_A(x,y)$ na forma matricial (em geral será rectangular)

Card (x) = número de linhas

Card (y) = número de colunas

— Escrever $J_B(y, z)$ igualmente na forma matricial

Card (y) = número de linhas

Card (z) = número de colunas.

— Executar a operação usual de *producto de matrizes* onde o operador

$$\begin{cases} \nabla \text{ corresponde a } + \text{ (Soma)} \\ \Delta \text{ corresponde a } \cdot \text{ (Produto)} \end{cases}$$

Por exemplo sejam dados:

$$\begin{cases} X \\ Y \\ Z \end{cases} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} \text{Card } (X) = 2 \\ \text{Card } (Y) = 4 \\ \text{Card } (Z) = 3 \end{cases}$$

$J_A \in J_1$ família das aplicações de $X \times Y$ em Ω

$J_B \in J_2$ » » de $Y \times Z$ em Ω

$J_{A \circ B} \in J_3$ » » de $X \times Z$ em Ω

Escrevam-se J_A e J_B sob a forma de matrizes e efectue-se o respectivo producto:

$$\begin{bmatrix} J_A(x_1 y_1) & J_A(x_1 y_2) & J_A(x_1 y_3) & J_A(x_1 y_4) \\ J_A(x_2 y_1) & J_A(x_2 y_2) & J_A(x_2 y_3) & J_A(x_2 y_4) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} J_B(y_1 z_1) & J_B(y_1 z_2) & J_B(y_1 z_3) \\ J_B(y_2 z_1) & J_B(y_2 z_2) & J_B(y_2 z_3) \\ J_B(y_3 z_1) & J_B(y_3 z_2) & J_B(y_4 z_3) \\ J_B(y_4 z_1) & J_B(y_4 z_2) & J_B(y_3 z_3) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} J_{AoB}(x_1 z_1) & J_{AoB}(x_1 z_2) & J_{AoB}(x_1 z_3) \\ J_{AoB}(x_2 z_1) & J_{AoB}(x_2 z_2) & J_{AoB}(x_2 z_3) \end{bmatrix}$$

e onde, por exemplo, a expressão de $J_{AoB}(x_1 z_3)$ é dada: $J_{AoB}(x_1, z_3) = \nabla_y [\Delta(J_A(x_1, y), J_B(y, z_3)]$ ou, representando todas as operações a efectuar, temos:

$$J_{AoB}(x_1, z_3) = \nabla \{ \Delta[J_A(x_1, y_1), J_B(y_1 z_3)] ,$$
$$, \Delta[J_A(x_1, y_2), J_B(y_2 z_3)] ,$$
$$, \Delta[J_A(x_1 y_3), J_B(y_3 z_3)] ,$$
$$, \Delta[J_A(x_1 y_4), J_B(y_4, z_3)]\}$$

Como se vê, procede-se como no produto de matrizes onde o símbolo Δ está pelo produto e ∇ está pela soma.

Os símbolos Δ e ∇ podem ser substituídos por outros, desde que esses outros sejam defenidos no conjunto Ω; assim, por exemplo, no reticulado de Zadeh $([0,1], \dot{+}, \psi)$, Δ e ∇ serão substituídos por $\dot{+}$ e ψ e a operação ∇ $(\Delta [\quad])$ pode ser substituída por $\dot{+}$ $(\psi [\quad])$.

É evidente conforme os operadores usados e a ordem porque intervêem assim o resultado da composição é diferente.

Os pares de operadores mais usados são os abaixo apresentados e as designações respectivas são as que vão indicadas adiante:

(∇, Δ) limite Sup./limite Inf. ou Sup./Inf.

(Δ, ∇) limite Inf./limite Sup. ou Inf./Sup.

$(\psi, \dot{+})$ Max./Min

$(\dot{+}, \psi)$ Min./Max.

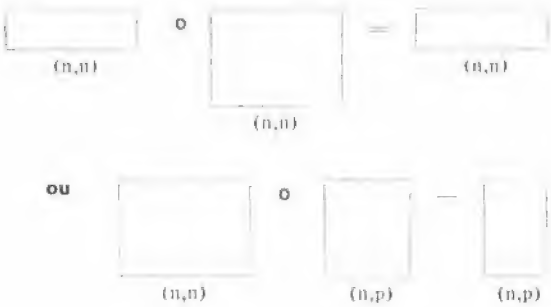
$(\psi, \div)$ Max./Prod.

$(\dot{+}, \pm)$ Min./Soma

b) *Aplicações particulares da operação da composição:*

Se (Card x=Card y) ou (Card y=Card z) então a matriz composta (x,z) terá a mesma forma da matriz (y, z) ou da matriz (x, y).

Resulta duma das matrizes a composição ser quadrada.



Se uma das relações for quadrada e a outra degenerar num *vector* o resultado será também um *vector* do mesmo tipo.

Como um vector representa o caracterizante de um *Conjunto Vago.*

Assim uma relação vaga induz um conjunto vago a partir de outro conjunto vago.

Diz-se então que o conjunto vago A, por meio de uma Relação Vaga R, *induziu* outro conjunto vago B:

$$A \in (1 \times Y),\ B \in 1 \times Z) \text{ e } R \in (Y \times Z)$$

onde 1 representa o elemento único do conjunto universal X.

Note-se que o produto cartesiano $X \times Y$ quando Card $X=1$, tem por Card $(X \times Y)$=Card Y; é pois possível estabelecer uma correspondência (1,1) entre os elementos (x, y) de $X \times Y$, e os elementos y de Y, de forma seguinte:

$$\underset{y}{\forall} \quad (x, y) \rightleftarrows y \quad (X \text{ só tem um elemento } x)$$

c) *Família de Sub-reticulados estáveis*

Seja dado um reticulado (Ω, ∇, Δ) e seja Ω um subconjunto *estável de* Ω, isto é, (Ω, ∇, Δ) é um reticulado também onde as operações ∇, Δ gozam das mesmas propriedades que gozavam em (Ω, ∇, Δ), *(nomeadamente são fechadas e unicas quando aplicadas nesse sub-conjunto).* O reticulado (Ω, ∇, Δ) é um sub-conjunto (impróprio) estável dele próprio.

Vamos designar por $F(\Omega)$ a família de todos os sub-conjuntos *estáveis* (próprios ou impróprios) de um dado conjunto reticulado (Ω, ∇, Δ).

Pode então generalizar-se a aplicação da operação de composição de relações, a relações que não têem o mesmo reticulado de referência mas desde que seja exigido que os reticulados de referência sejam escolhidos na mesma *família de sub-reticulados estáveis.*

É fácil de ver que é correcta a acersão feita lembrando que os elementos dos sub-conjuntos estáveis são necessariamente elementos do conjunto Ω.

Assim é possível fazer composições entre conjuntos vulgares e conjuntos de Zadeh.

Com efeito: $([0,1], \dot{+}, \psi)$ é reticulado de Zadeh; o reticulado de Bool $(\{0,1\}, \psi, \dot{+})$ tem todas as propriedades do anterior (e mais algumas de que se não tira qualquer partido), portanto é um reticulado estável do anterior.

Por exemplo sejam dados:

O conjunto vago $A \subseteq X$ e $([0,1], \psi, \dot{+})$

O conjunto vulgar B, $B \subseteq X \times Y$ e $(\{0,1\}, \psi, \dot{+})$.

mas $(\{0,1\}, \psi, \dot{+})$ é um sub-reticulado estável de $([0,1], \psi, \dot{+})$ e ambos pertencem à família de sub-reticulados estáveis $F([0,1], \psi, \dot{+})$ (reticulado de Zadeh). Seja então, por exemplo:

$$r_A = [x_1/0{,}1,\ x_2/0{,}5,\ x_3/0{,}3] \text{ e:}$$

$$J_B = \begin{bmatrix} x_1\, y_1 = 1 & x_1\, y_2 = 0 \\ x_2\, y_1 = 0 & x_2\, y_2 = 1 \\ x_3\, y_1 = 0 & x_3\, y_2 = 1 \end{bmatrix}$$

então

$$\Gamma_{AoB} = \left[\begin{array}{c:c} \{\psi[\hat{\uparrow}(0,1,1), \hat{\uparrow}(0,1,0), \hat{\uparrow}(0,1,0)]\} & \{\psi[\hat{\uparrow}(0,1,0), \hat{\uparrow}(0,1,1), \hat{\uparrow}(0,1,1)]\} \\ \{\psi[\hat{\uparrow}(0,5,1), \hat{\uparrow}(0,5,0), \hat{\uparrow}(0,5,0)]\} & \{\psi[\hat{\uparrow}(0,5,0), \hat{\uparrow}(0,5,1), \hat{\uparrow}(0,5,1)]\} \\ \{\psi[\hat{\uparrow}(0,3,1), \hat{\uparrow}(0,3,0), \hat{\uparrow}(0,3,0)]\} & \{\psi[\hat{\uparrow}(0,3,0), \hat{\uparrow}(0,3,1), \hat{\uparrow}(0,3,1)]\} \end{array}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \psi[0,1,\ 0,\ 0] & \psi[0,\ 0,1,\ 0,1] \\ \psi[0,5,\ 0,\ 0] & \psi[0,\ 0,5,\ 0,5] \\ \psi[0,3,\ 0,\ 0] & \psi[0,\ 0,3,\ 0,3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 \\ 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 0,3 \end{bmatrix}$$

d) *Composição de Relações Vagas e suas principais propriedades*

Tem interesse em verificar se as operações sobre relações vagas a que se deu o nome de *composição* gozam precisamente das mesmas propriedades das composições vulgares de relações vulgares.

Uma composição vulgar de relações vulgares goza das seguintes propriedades.

I) $(R_A \circ R_B)^{-1} = R_A^{-1} \circ R_B^{-1}$

II) $(R_A \circ R_B) \circ R_C = R_A \circ (R_B \circ R_C)$

III) $(R_A \circ \bigcup_{i=1}^{n} P_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (R_A \circ P_i)$

IV) $(R_A \circ \bigcap_{i=1}^{n} P_i) = \bigcap_{i=1}^{n} (R_A \circ P_i)$

onde:

$$R_A \subseteq X \times Y$$
$$R_B \subseteq Y \times Z$$
$$R_C \subseteq Z \times W$$

e $\bigvee_{i=1}^{n} P_i \subseteq Y$

Convertendo estas definições e adaptando a relações e conjuntos vagos, haverá que definir:

A família $F(\Omega)$ associada a (Ω, ∇, Δ);

As famílias de aplicações funcionais de

$$X \times Y \text{ em } \underset{1}{\Omega} \in F(\Omega) \rightarrow J_1$$

$$Y \times Z \text{ em } \underset{2}{\Omega} \in F(\Omega) \rightarrow J_2$$

$$Z \times W \text{ em } \underset{3}{\Omega} \in F(\Omega) \rightarrow J_3$$

$$Y \text{ em } \underset{4}{\Omega} \in F(\Omega) \rightarrow J_4$$

As relações vagas: $A \subseteq X \times Y$; $B \subseteq Y \times Z$; $C \subseteq Z \times W$ têem por caracterizantes respectivamente:

$$J_A(x, y) \in J_1$$
$$J_B(y, z) \in J_2$$
$$J_C(z, w) \in J_3$$
$$\Gamma_{P_i}(y) \in J_K$$

Γ_{Pi}; J_A, J_B, $J_C \in \Omega$, porque $\underset{1}{\Omega}$, $\underset{2}{\Omega}$, $\underset{3}{\Omega}$, e $\underset{4}{\Omega}, \subseteq \Omega$.

Recorde-se ainda que o par de operadores associados (∇, Δ) se aplicam em $\underset{1}{\Omega}$, $\underset{2}{\Omega}$, $\underset{3}{\Omega}$, $\underset{4}{\Omega}$ e Ω.

Nestas condições as proposições I), II), III) e IV) podem adaptar-se a conjuntos e relações vagas da forma seguinte:

I) $J_{(A.B)^t} = J_{(B^t.A^t)}$

II) $J_{[(A.B)C]} = J_{[A.(B.C)]}$

III) $J_{[A.\bigcup_{i=1}^{n} P]} = \nabla_{i=1}^{n} J_{(A.P_i)}$

IV) $J_{[A.\bigcap_{i=1}^{n} P_i]} = \Delta_{i=1}^{n} J_{(A.P_i)}$

o caracterizante de P_i é $\Gamma_{P_i} \in \underset{4}{\Omega} \subseteq \Omega$.

Há que demonstrar que se verificam ou indicar, pelo menos, em que condições são verdadeiras.

I) $J_{(A,B)^t} = J_{B^t} \circ J_{A^t}$

$$J_{(A,B)}(x, z) = \nabla_y \left[J_A(x, y) \Delta J_B(y, z) \right]$$

mas por definição de relação inversa (veja-se f) será:

$$J_{(AoB)^t}(z, x) = J_{(AoB)}(x, z)$$
$$J_{B^t}(z, y) = J_B(y, z)$$
$$J_{A^t}(y, x) = J_A(x, y)$$

e daí que:

$$J_{(A,B)^t}(z, x) = \Delta_y \left[J_{A^t}(y, x) \Delta J_{B^t}(z, y) \right]$$

mas, por definição de composição

$$= \Delta_y \left[J_{B^t}(z, y) \Delta J_{A^t}(y, x) \right] = J_{(B^t, A^t)}$$

Donde finalmente:

$$(R_A \circ R_B)^{-1} = R_B^{-1} \circ R_A^{-1}$$

II) $J_{[(A,B),C]} = J_{[A,(B,C)]}$

$$J_{(A,B)}(x, z) = \nabla_y \left[J_A(x, y) \Delta J_B(y, z) \right]$$

$$J_{[(A,B),C]}(x, w) = \nabla_z \left\{ \nabla_y \left[J_A(x, y) \Delta J_B(y, z) \right] \Delta \right.$$
$$\left. \Delta J_c(z, w) \right\}$$

Haverá pois que distribuir o operador Δ em relação a ∇, para poder passar à forma:

$$\underset{z}{\nabla}, \underset{y}{\nabla} \left\{ \Delta \left[J_A(x, y), J_B(y, z), J_C(z, w) \right] \right\}$$

para depois se arranjar sob a forma:

$$\underset{y}{\nabla} \left\{ \underset{z}{\nabla} \left[J_B(y, z) \Delta J_C(z, w) \right] \Delta J_A(x, y) \right\} = J_{(A,B,C,)}(x, w)$$

Portanto ou o reticulado é *distributivo* e a associabilidade da composição é possível ou *não* é distributivo e então, em rigor, a operação definida não é uma *composição*.

Prefere-se, porém, dizer que se *trata* de uma *composição não associativa*.

$$\text{III)} \quad J_{\left(A, \bigcup_{i=1}^{n} P_i\right)} = \underset{i=1}{\overset{n}{\nabla}} J_{(A, P_i)}$$

Com efeito:

$$J_{(A,P_i)}(x, y) = \underset{y}{\nabla} [J_A(x, y) \Delta r_P \ (y)]$$

$$\underset{i=1}{\overset{n}{\nabla}} J_{(A, P_i)} = \underset{i=1}{\overset{n}{\nabla}} \underset{y}{\nabla} [J_A(x, y) \Delta r_{P_i}(y)]$$

os operadores ∇ são comutativos e daí que

$$= \underset{y}{\nabla} \underset{i=1}{\overset{n}{\Delta}} [J_A(x, y) \Delta r_{P_i} \ (y)]$$

$$= \underset{y}{\nabla} [J_A(x, y) \Delta r_{\bigcup_{i=1}^{n} P_i} \ (y)]$$

$$= J_{\left(A, \bigcup_{i=1}^{n} P_i\right)} (x, y)$$

$$\text{IV)} \quad J_{\left(A, \bigcap_{i=1}^{n} P_i\right)} = \underset{i=1}{\overset{n}{\Delta}} J_{(A, P_i)}$$

Procede-se como em c).

Em resumo pode dizer-se que as composições de relações vagas gozam de todas as propriedades das composições de relações vulgares, excepto a *associabilidade* que implica ser o reticulado (Ω, ∇, Δ) distributivo.

Repare-se que o reticulado de Bool (que se usa em relações vulgares) é distributivo.

e) *Existência de uma relação neutra.*

Seja dada uma relação $R_A \subseteq X \times Y$ e $F(\Omega)$ uma família de reticulados estáveis associado ao reticulado (Ω, ∇, Δ) e sejam:

$$\underset{xy}{\Omega} \in F(\Omega)$$

$$\underset{xx}{\Omega} \in F(\Omega)$$

$$\underset{yy}{\Omega} \in F(\Omega)$$

e

$$J_A(x, y) \in \underset{xy}{\Omega} \quad \text{e} \quad (x, y) \in X \times Y$$

$$J_P(x_i, x_j) \in \underset{xx}{\Omega} \quad \text{e} \quad (x_i, x_j) \in X \times X$$

$$J_Q(y_i, y_j) \in \underset{yy}{\Omega} \quad \text{e} \quad (y_i \ y_j) \in Y \times Y$$

Procure-se a forma de R_P e R_Q tal que:

$R_P \circ R_A = R_A$ neutro à esquerda

$R_A \circ R_Q = R_A$ neutro à direita

Com os operadores ∇ e Δ podem construir-se duas Leis de Composição *tipicas:*

$$\nabla \ [(\ \ ) \Delta (\ \ )] = \underset{\nabla\Delta}{\rtimes}$$

e

$$\Delta \ [(\ \ ) \nabla (\ \ )] = \underset{\Delta\nabla}{\rtimes}$$

Composição do tipo $\underset{\nabla\Delta}{\rtimes}$

$$J_{(A,Q)}(x, y) = \underset{y_i}{\nabla} \left[J_A(x, y) \Delta J_Q(y_i, y) \right]$$

ou suprmindo os símbolos J_A e J_Q.

$$\underset{yk}{\forall} \left\{ \nabla \left[(x, y_1) \Delta (y_1, y_K) ; (x, y_2) \Delta (y_2, y_K) ; \ldots \right] = (x, y_K) \right\}$$

Para que $(x, y_i) \Delta (y_i, y_K) \leqslant (x, y_K)$ e $i \neq k$

basta que $(y_i, y_K) = O$ (ínfimo) (Para $i \neq k$)

e para que $(x, y_K) \Delta (y_K, y_K) = (x, y_K)$

basta que $(y_K, y_K) = V$ (supremo)

Em resumo teremos:

$$J_Q(y_i, y_j) = \begin{cases} o & \text{se } i \neq j \\ V & \text{se } i = j \end{cases}$$

A matriz de J_Q toma a forma seguinte:

$$\begin{bmatrix} V & 0 & 0 & — & — & — \\ 0 & V & & & & \\ 0 & & V & & & \\ 0 & & & & & \\ I & & & & & \\ I & & & & & V \end{bmatrix}$$

matriz simétrica, com zeros por toda a parte menos na diagonal que é preenchida por V.

Raciocínio idêntico se faz para $J_P(x_i \ x_j)$, que toma a mesma forma.

Composição do tipo $\underset{\Delta\nabla}{\rtimes}$

$$J_{(A, Q)}(x, y) = \underset{yi}{\Delta} [J_A(x, y_i) \nabla J_Q(y_i, y)]$$

Raciocinando dum modo idêntico será necessário e suficiente que:

$$J_Q(y_i, y_j) = \begin{cases} V & \text{se} \quad i \neq j \\ O & \text{se} \quad i = j \end{cases}$$

e a matriz de J_Q toma a forma:

$$\begin{bmatrix} O & V & V & \cdots & V \\ V & O & V & & \vdots \\ V & V & O & & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V & \cdots & \cdots & \cdots & O \end{bmatrix}$$

Identicamente para J_P.

Note-se que R_Q *não* se pode compor com R_P em geral.

Porém, se $X \equiv Y$, então teremos:

Composição do tipo $\rtimes_{\nabla\Delta}$

$$J_{(Q,P)} = J_{(P,Q)} = O \qquad \forall\, (x_i\ x_j) \in X$$

Composição do tipo $\rtimes_{\Delta\nabla}$

$$J_{(Q,P)} = J_{(P,Q)} = V \qquad \forall\, x_i\,(x_j) \in X$$

Porque as composições são de dois tipos, poderá simbolizar-se da forma seguinte:

$$\begin{pmatrix} \nabla\Delta \\ A, B \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \Delta\nabla \\ A, B \end{pmatrix}$$

ou ainda mais pesadamente:

$$\begin{pmatrix} \nabla\Delta \\ A, B \end{pmatrix} (x, z) \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \Delta\nabla \\ A, B \end{pmatrix} (x, z)$$

Significando estes símbolos que:

— $R_A \subseteq X \times Y$

— $R_B \subseteq Y \times Z$

— O operador é $\nabla\,[(\ \ )\ \Delta\ (\ \ )]$

ou $\Delta[(\ \ )\ \nabla\ (\ \ )]$

— $x \in X,\ Y \in Y$ e $z \in Z$

e) *Da existência de uma relação que composta com uma relação dada produza a relação R_Q ou R_P.*

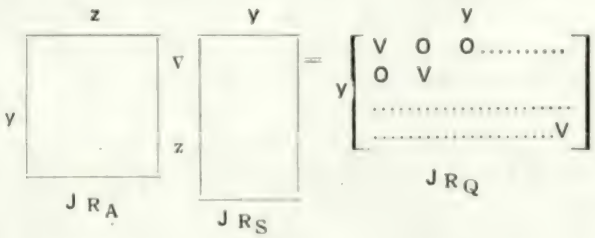
Façamos, por exemplo, para R_Q e usando a composição $\rtimes_{\nabla\Delta}$.

Seja dada uma relação $R_A \subseteq Y \times Z$ e $R_Q \subseteq Y \times Y$. Então a relação R_S a encontrar será tal que:

$$R_S \subseteq Z \times Y$$

$$\text{e} \quad R_A \circ R_S = R_Q$$

Ora



Basta que JR_A tenha uma linha sem o elemento V para não ser possível formar um V, mesmo que J_{RS} fosse todo constituído por V, isto é, em geral J_{RS} *não existe*. Era fácil de ver que para a outra composição (Δ_∇) e para R_P sucedia o mesmo.

(Continua na Técnica 437 — Junho 1976)

Feiras, Conferências, Exposições e Congressos

OBJECTIVOS E PROGRAMA	LOCAL, DATA, ORGANIZAÇÕES E INFORMAÇÕES
Comportamento de Edifícios sob a Acção dos Sismos	L. N. E. C. - Lisboa 5 a 7 de Dezembro - 76
V Simposio Iberoamericano de Catálise	Fundação Gulbenkian - Lisboa Maio/Junho - 76
Colloque International sur la Concepcion et l'Equipment des Laboratoires de Haute Activité	A. I. E. A. - Otaniemi (Finlândia) 23 a 30 de Julho - 76
Seminaire International sur la Concepcion et l'Essai des Emballages Destinés au Transport des Matières Radioactives	A. I. E. A. - Viena 2 a 6 de Agosto - 76
Colloque International FAO/AIEA/AGROCHIMICA sur les Etudes Concernant les Matières Organiques du Sol	Brunswick - R. F. A. 23 a 27 de Agosto - 76
Troisième Exposition International avec Festival-HIFI 76	DÜSSELDORF — R. F. A. 6 a 10 de Setembro - 76
International Oil-Poluition Prevencion Exhibition and Congress	Hamburgo 24 a 29 de Setembro - 76
Electrode Phenomena in Gas Discharger (III rd conference)	Estoril 21 a 25 de Setembro - 76
Plant Engineering and Mainternance Conference	National Exhibition Centre 31 de Agosto a 3 de Setembro - 76
International Trade Fair on Waste Handling, Waste Recovery and Industrial Cleansing	Birmingham - Inglaterra 27 de Setembro a 10 de Outubro - 76
Obras de Protecção Costeira	Elmia, Jönköping, Suécia 27 de Setembro a 1 de Outubro - 76
Bienal da Máquina Operatriz	L. N. E. C. - Lisboa Outubro - 76
First International Tinplate Conference	Milão - Itália 2 a 9 de Outubro - 76
Planos Locais e Política Urbana	Londres - Inglaterra 5 a 8 de Outubro - 76
6 ème conference internationale sur la physique des plasmas et la recherche concernant la fusion nucléaire contrôlée	L. N. E. C. - Lisboa 2.ª fase - Outubro - 76 3.ª fase - Dezembro - 76
Tráfego, Segurança e Traçado de Estradas	A. I. E. A. - Berchtesgaden - R. F. A. 6 a 13 de Outubro - 76

C. D. U. 621.389:537.311

Obtenção por simulação numérica da distribuição em energia de uma população de electrões (1)

H. J. S. Abreu Santos
Eng. Electrotécnico I. S. T.
Assistente do I. S. T.

RESUMO

A determinação da distribuição em equilíbrio termodinâmico dos electrões de uma população pelas diversas energias obriga em muitos casos a cálculos trabalhosos se recorrermos aos resultados da estatística de Fermi-Dirac. Apresenta-se outra alternativa, por simulação numérica, com base num modelo que traduz os aspectos relevantes do comportamento dos electrões; aplicável no domínio dos pequenos números, conduz no entanto a resultados próximos dos previstos pela estatística de Fermi-Dirac. Faz-se o estudo de uma situação do tipo encontrado num semicondutor com impurezas dadoras e aceitadoras simultâneas e parcialmente ionizadas.

ABSTRACT

The calculation of the distribution of a population of electrons by the different energy levels on the basis of the results given by the Fermi-Dirac statistics often involves morose calculations. An alternative method by numerical simulation is proposed, based on a model discribing the significant behaviour of the electrons; applicable to small populations it leads nevertheless to results close to those obtainable by the Fermi-Dirac statistic. A situation of the type met in semiconductors with partly ionised doner and accepter impurities is studied.

1 — INTRODUÇÃO

Se um gás de electrões obedecer:

1) à indiscernibilidade dos electrões;

2) ao princípio de exclusão de Pauli;

a estatística de Fermi-Dirac prevê para a função densidade de probabilidade de ocupação dos estados estacionários existentes ao longo das energias [1]

$$f\left(\frac{W-W_F}{kT}\right)=\left[1+\exp\left(\frac{W-W_F}{kT}\right)\right]^{-1} \qquad (1.1)$$

onde

W — Energia genérica

W_F — Energia correspondente ao nível de Fermi

kT — Energia característica da temperatura T

Conhecidos a energia total W_0 e o número total de electrões N_0, a temperatura T e a energia do nível de Fermi são determinadas a partir de

$$N_0=\int_W f\left(\frac{W-W_F}{kT}\right) g(W)\, dW \qquad (1.2)$$

$$W_0=\int_W f\left(\frac{W-W_F}{kT}\right) W\, g(W)\, dW \qquad (1.3)$$

onde

(1) Publicação do Laboratório de Medidas Eléctricas do I. S. T. integrada no Projecto de Investigação TLE-5 subsidiado pelo Instituto de Alta Cultura.

g (W) d W — Estados de movimento estacionários existentes no intervalo de energia dW.

No caso dos valores da energia serem discretos, a (1.1), (1.2) e (1.3) correspondem

$$\frac{n_i}{N_i} = \left[1 + \exp\left(\frac{W_i - W_F}{kT} \right) \right]^{-1} \qquad (1.1a)$$

onde

i — Nível genérico dos k níveis discretos de energia

W_i — Energia do nível i

N_i — Número de estados estacionários no nível i

n_i — Número de electrões no nível i

$$N_0 = \sum_{i=1}^{k} n_i = \sum_{i=1}^{k} N_i \left[1 + \exp\left(\frac{W_i - W_F}{kT} \right) \right]^{-1} \qquad (1.2a)$$

$$W_0 = \sum_{i=1}^{k} n_i W_i = \sum_{i=1}^{k} N_i W_i \left[1 + \exp\left(\frac{W_i - W_F}{kT} \right) \right]^{-1} \qquad (1.3a)$$

2 — DISTRIBUIÇÃO DE EQUILÍBRIO CORRESPONDENTE A k NÍVEIS, DADOS N_0 e W_0

2.1 — O modelo

Dados k e N_i (i = 1... k), pretendemos os n_i (i = 1... k) em equilíbrio termodinâmico.

Consideremos uma distribuição n_i inicial qualquer, desde que satisfaça N_0 e W_0 pretendidos.

De acordo com o diagrama de fluxo da fig. 1 são as seguintes as operações realizadas nos diversos blocos:

Bloco 1 — Leitura dos valores iniciais para cada um dos níveis em estudo (i=1... k) dos estados estacionários preenchidos, n_i, e vagos $N_i - n_i$. Os estados vagos terão também que estar definidos de i = k + 1... 2k embora não nos interesse a distribuição final acima do nível k.

Bloco 2 — Inicialização do contador de colisões.

Bloco 3A — Escolha pseudoaliatória do nível de energia donde sai um electrão que vai trocar energia com outro por «colisão».

São realizadas as seguintes operações:

3 A.I — Geração de um número pseudoaliatório maior que zero e menor ou igual a um. O gerador pseudoaliatório foi feito com base na referência [2] e tem um período de 16 384.

3 A.II — Multiplicação do número pseudoaliatório pelo número total de electrões da população.

3 A.III — Procura, por soma do número de electrões nos sucessivos níveis, do nível para o qual a soma acumulada atinge o número obtido em 3 A.II. Será esse o nível de saída de um electrão.

3 A.IV — Actualização dos estados estacionários preenchidos e vagos no nível de saída.

Bloco 3B — Análogo ao anterior, faz a escolha dum segundo electrão par do anterior na colisão.

Bloco 4 — Soma das energias de um e outro electrão, que será a mesma após a colisão mas eventualmente repartida de outra maneira e aliatoriamente.

Bloco 5 — Escolha pseudoaliatória dos níveis de entrada para um e outro electrão após a colisão.

São realizadas as seguintes operações:

5.I — Soma dos produtos de vagas de todos os pares de níveis cujas energias somam uma energia igual à da colisão. Porque esta energia pode ser dupla da do nível k as vagas têm que estar definidas até ao nível 2k.

5.II — Multiplicação do número obtido em 5.I por um novo número pseudoaliatório.

5.III — Atribuição a cada nível de energia dum número P_i (i=1... 2k) que é a soma dos produtos de vagas de pares de níveis que respeitam a energia da colisão desde o nível 1 até i. Sendo N o número obtido em 5.II o nível de entrada i será tal que $P_{i-1} < N \leq P_i$.

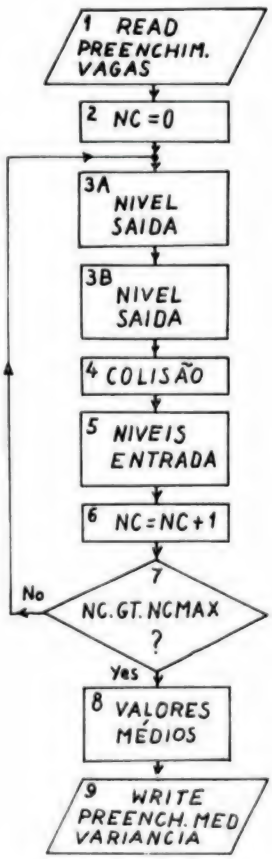


Fig. 1 — Diagrama de fluxo

O outro electrão entra no nível a que corresponde a energia que falta para completar a energia da colisão.

5.IV — Verificação de que nenhum dos níveis obtidos em 5.III é superior a k. Se o for, um electrão é emitido deixando de pertencer à população em estudo com o consequente decréscimo em N_0 e W_0

Bloco 6 — Incremento do contador de colisões.

Bloco 7 — Comparação do número de colisões realizado com o número de colisões pretendido.

Bloco 8 — Cálculo dos preenchimentos médios, NEAV, para todos os níveis, bem como da variância, σ.

Bloco 9 — Escrita dos valores calculados em 8.

Para que seja praticável a simulação numérica teremos que nos cingir a um número de electrões que não é do domínio dos grandes números e a um número limitado do níveis.

A rapidez, em termos do número de colisões, com que o sistema tende para o equilíbrio depende da distribuição inicial. As emissões são tanto menos prováveis quanto mais baixas forem as energias desta distribuição.

2.2 — Resultados

A situação inicial foi a da fig. 2-A.

Consideraram-se 20 níveis e 20 estados estacionários em cada nível. Na situação inicial a energia total do sistema era $W_0 = 1895$, tomando para unidade de energia a diferença de energia entre dois níveis consecutivos, e o número de electrões $N_0 = 255$. A situação do sistema ao fim de um número de colisões NC era

NC	N_0	W_0
10 000	245	1 669
20 000	244	1 646
30 000	244	1 646
40 000	243	1 625
50 000	243	1 625
60 000	243	1 625

As médias deverão ser tomadas para colisões durante as quais não tenha havido um número de emissões que faça variar apreciavelmente N_0 e W_0.

Na fig. 2-B temos os resultados obtidos para médias das 10 000 últimas colisões de 10 000, 20 000, 30 000 e 40 000 comparados com os resultados previstos pela estatística de Fermi-Dirac. Estes foram obtidos a partir de 1.1, uma vez determinados W_F e kT que satisfaziam a (1.1a), (1.2a), e (1.3a).

A média das primeiras 10 000 colisões não foi tomada sempre para a mesma população e energia estando o resultado compreendido entre o previsto para a situa-

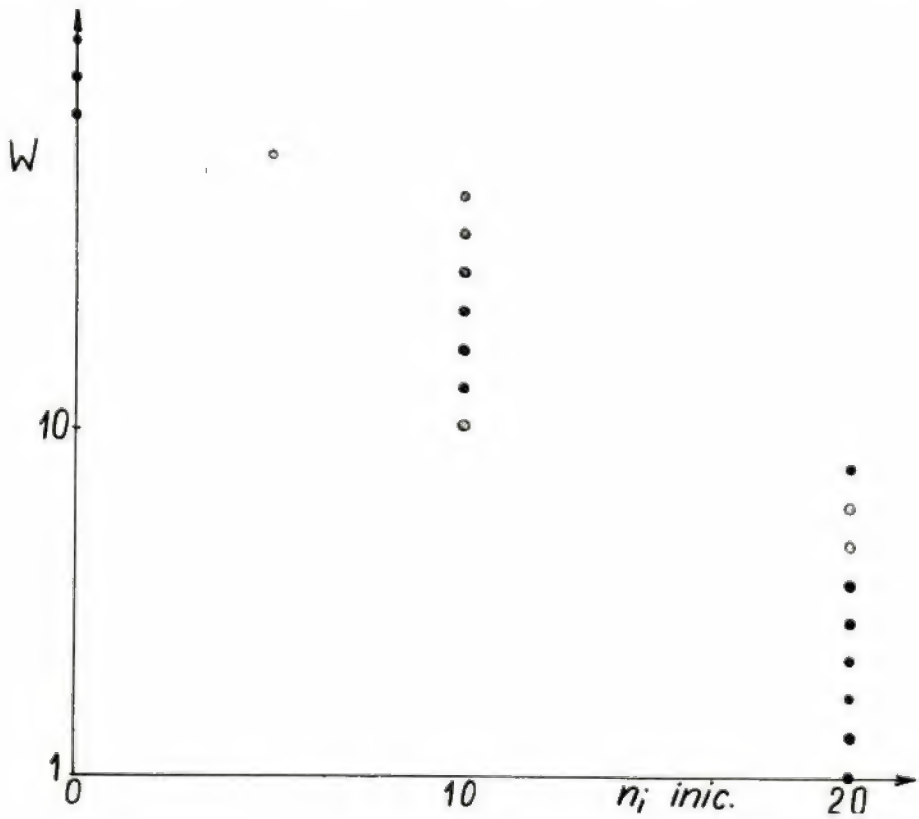


Fig. 2-A — Preenchimento inicial, n_i, dos diversos níveis de energia, W

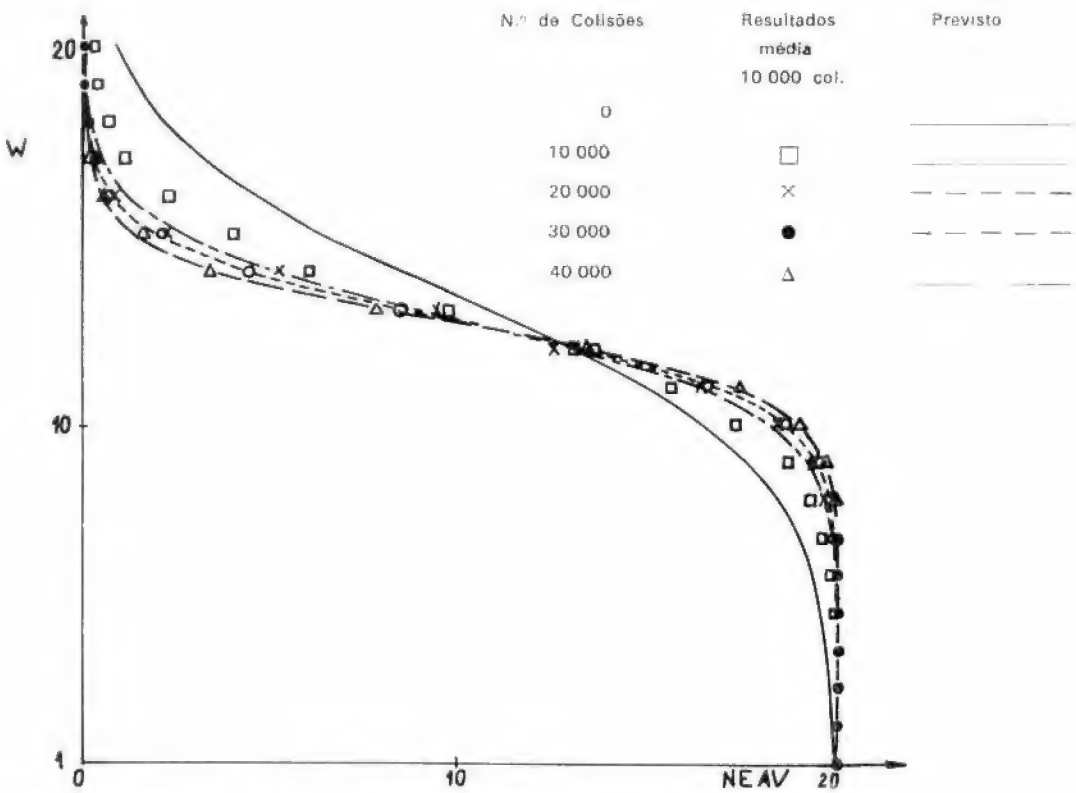


Fig. 2-B — Preenchimentos médios de 10 000 colisões, NEAV, para os diversos níveis de energia, W, comparados com os valores previstos

ção inicial e final. Das 20 000 para as 30 000 colisões não houve emissões e a distribuição está próxima da de equilíbrio. O electrão de energia 21 emitido entre as 30 000 e as 40 000 colisões provocou um «arrefecimento» do gás. O bom acordo da distribuição obtida com a prevista para a situação final leva a supôr que a emissão se tenha dado no princípio deste grupo de 10 000 colisões.

QUADRO I

Nível	Previsto	40 000 col.	50 000 col.	60 000 col.
1	20.00	20.00	20.00	20.00
2	20.00	20.00	20.00	20.00
3	20.00	20.00	20.00	20.00
4	20.00	20.00	20.00	20.00
5	20.00	20.00	20.00	20.00
6	19.99	19.99	19.99	20.00
7	19.96	19.97	19.98	19.96
8	19.89	19.87	19.87	19.91
9	19.65	19.72	19.64	19.67
10	19.00	18.95	18.98	19.03
11	17.24	17.48	17.19	16.95
12	13.46	13.38	13.22	13.08
13	8.07	7.78	7.89	8.71
14	3.64	3.44	4.33	3.82
15	1.36	1.59	1.05	1.38
16	.47	.61	.49	.37
17	.16	.15	.17	.00
18	.05	.13	.00	.09
19	.02	.00	.00	.01
20	.01	.02	.03	.00

No quadro I temos os valores previstos pela estatística de Fermi com um erro menor que 0.005/20 comparados com os obtidos nas médias das 10 000 últimas colisões de 40 000, 50 000 e 60 000. Vemos que as flutuações nos preenchimentos dos estados estacionários são menores que 1/20 e a diferença entre os valores previstos e obtidos é menor que 0.7/20. Tomando médias de 20 000 colisões determinaram-se flutuações menores que 0.5/20 e uma diferença entre valores previstos e obtidos menor que 0.45/20, não tendo o modelo sido explorado até à precisão máxima possível.

A zona em que os resultados se afastam mais dos previstos é aquela em que os desvios quadráticos médios são maiores. Na fig. 3 apresenta-se a variância para os diversos níveis.

Algumas das causas responsáveis pelas diferenças entre os valores previstos e encontrados são:

1) O número de electrões não é do domínio dos grandes números e portanto os valores médios não convergem necessariamente para o mesmo valor que para os grandes números. As flutuações são grandes.

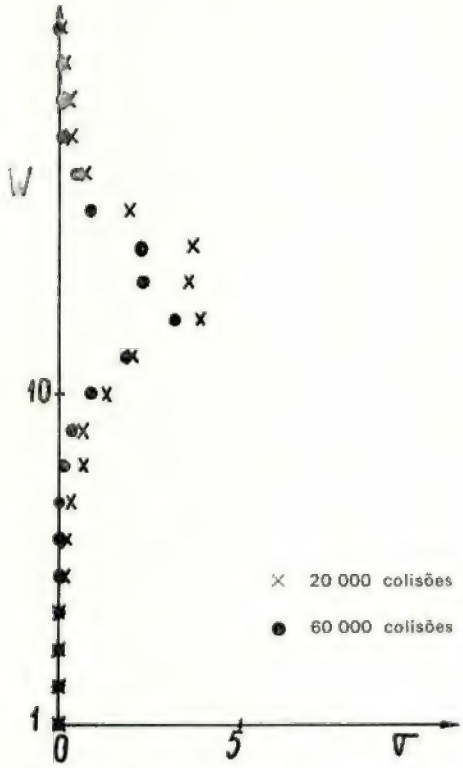


Fig. 3 — Variância σ para os diversos níveis de energia W para as 10 000 últimas colisões de 20 000 e 60 000 colisões

2) Mesmo às 60 000 colisões o sistema não está necessariamente em equilíbrio.

3) A convergência referida em 1) é em probabilidade e estamos a tomar médias de 10 000 colisões.

4) O gerador é pseudoaliatório e tem um período finito que foi excedido. Uma vez que o novo período encontrou o sistema numa situação diferente continuou no entanto a haver evolução.

O tempo de CPU(1) para a realização do programa foi de cerca de 5 minutos para 20 000 colisões.

3 — DISTRIBUIÇÃO DE EQUILÍBRIO A UMA TEMPERATURA T, DADOS N_0 E T.

3.1 — Situação de equilíbrio para dois gases de partículas quando as partículas de um gás podem trocar energia com as do outro, mas não entre si, e a energia do conjunto é constante.

Por um caminho análogo ao seguido em [1] para um único gás de N_0 partículas e energia W_0, se tivermos dois gases A e B a que correspondem N_{0A}, W_{0A}, N_{0B} e W_{0B} mas onde o que se mantém constante é a energia do conjunto $W_0 = W_{0A} + W_{0B}$, demonstra-se (vide Apêndice) que na situação de equilíbrio termodi-

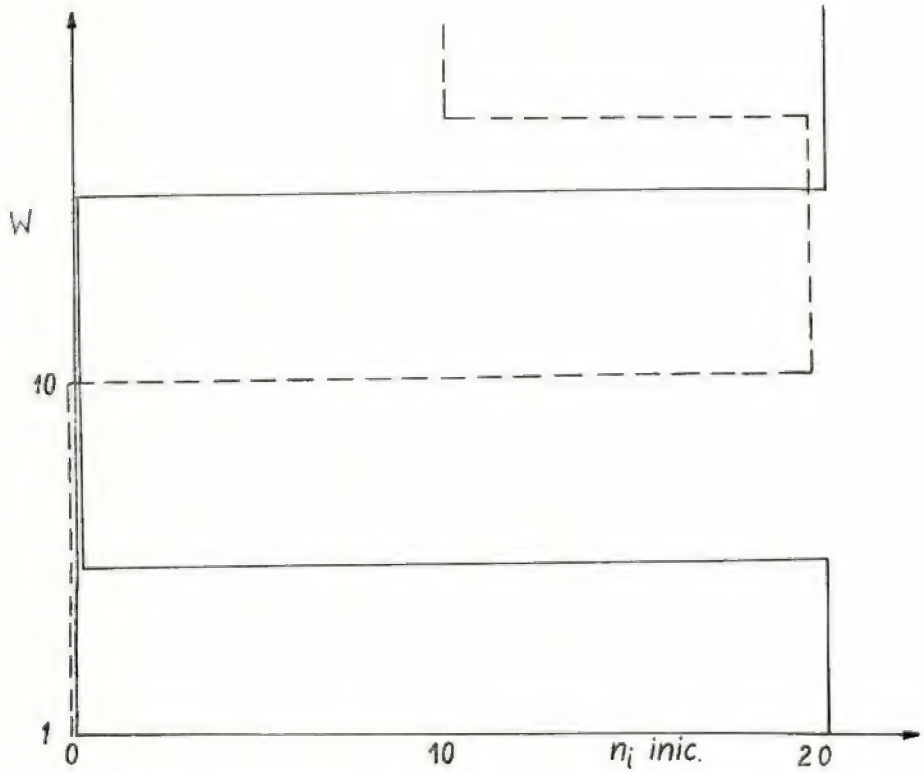


Fig. 4-A — Preenchimento inicial, n_i, dos diversos níveis de energia W

Gás A — — — — —
Gás B ————————

(1) O computador usado para todas as simulações foi o do Centro de Cálculo das Universidades de Lisboa, IBM 360/44.

nâmico o nível de Fermi não é necessariamente o mesmo para os dois gases e as distribuições são diferentes.

Se impusermos a indiscernibilidade entre os electrões do gás A, do gás B e dos electrões em colisão e o princípio de exclusão de Pauli para ambos os gases, as alterações a introduzir no modelo apresentado em 2.1 são:

1) Os electrões que colidem são retirados um do gás A e outro do gás B.

2) Os electrões regressam um ao gás A e outro ao B. Os produtos de vagas são portanto produtos de vagas do gás A por vagas do gás B que respeitem a energia da colisão.

Consideraram-se 20 estados por nível e 20 níveis tanto para o gás A como para o B. A situação inicial foi a da fig. 4-A.

Os resultados obtidos tomando médias das últimas 10 000 colisões de 60 000, 70 000 e 80 00 estão comparados com os valores previstos com um erro menor que 0.005/20 pela estatística de Fermi na fig. 4-B e nos quadros II. ($N_{oA}=93$, $N_{oB}=122$, e $W_{oA}+W_{oB}=830$).

As flutuações dos resultados são menores que 0.44/20 e a diferença entre os valores previstos e encontrados é menor que 0.42/20.

O tempo de CPU é aproximadamente o de 2.2.

QUADRO II-A

Gás A

Nível	Previsto	60 000 col.	70 000 col.	80 000 col.
1	18.81	18.91	18.90	18.91
2	17.79	17.73	17.84	17.82
3	16.08	15.93	15.90	16.07
4	13.52	13.56	13.28	13.31
5	10.29	10.24	10.01	10.31
6	7.01	7.01	6.99	7.31
7	4.31	4.32	4.30	4.08
8	2.45	2.33	2.69	2.38
9	1.33	1.37	1.54	1.55
10	.70	.96	.74	.70
11	.36	.43	.38	.28
12	.18	.14	.13	.13
13	.09	.07	.19	.02
14	.05	.08	.08	.12
15	.02	.01	.01	.00
16	.01	.04	.01	.00
17	.01	.01	.02	.00
18	.00	.01	.00	.00
19	.00	.00	.00	.00
20	.00	.00	.00	.00

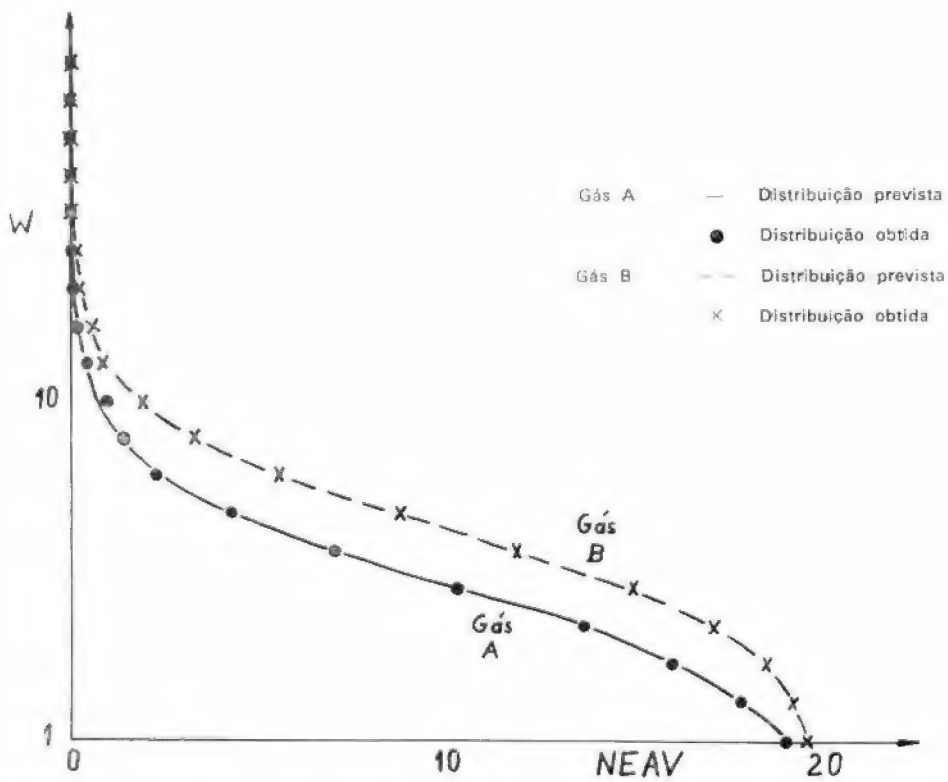


Fig. 4-B — Preenchimentos médios NEAV dos diversos níveis de energia W ao fim da 60 000 colisões. Média das 10 000 últimas colisões

QUADRO II-B

Gás B

Nível	Previsto	60 000 col.	70 000 col.	80 000 col.
1	19.55	19.48	19.42	19.51
2	19.13	19.08	19.20	19.13
3	18.36	18.38	18.38	18.38
4	17.02	17.00	17.27	16.95
5	14.88	14.90	14.89	14.73
6	11.93	11.77	11.99	11.85
7	8.58	8.69	8.53	8.42
8	5.53	5.55	5.51	5.94
9	3.25	3.31	3.16	3.25
10	1.80	1.93	1.87	1.91
11	.96	.86	.71	.99
12	.50	.62	.49	.33
13	.26	.24	.16	.27
14	.13	.10	.23	.29
15	.07	.06	.08	.04
16	.03	.02	.01	.00
17	.02	.02	.00	.00
18	.01	.00	.00	.00
19	.00	.00	.00	.00
20	.00	.00	.00	.00

3.2 — Situação de equilíbrio quando um dos gases mantem a distribuição inicial, que é a de equilíbrio à temperatura T.

Seja o gás B que já de início está à temperatura T pretendida no equilíbrio. A colisão para os electrões do gás A faz-se como em 3.1; o electrão do gás B volta à energia que tinha antes da colisão. Isto corresponde ao gás B ser um «banho» à temperatura T, com capacidade calorífica infinita e que imediatamente repõe a energia trocada pelo seu electrão na colisão. O equilíbrio atinge-se quando o gás A estiver também à temperatura T. De um ponto de vista de programação os electrões do gás B não precisam sequer de sair e voltar a entrar no mesmo nível e basta ter definidos os preenchimentos e as vagas para os diversos níveis os quais permanecem inalteráveis. Esses valores não têm que ser inteiros podendo representar uma aproximação da distribuição do gás B à temperatura T com a precisão pretendida.

Além da possibilidade de fixar a temperatura final para o gás A, este modelo permite tempos de CPU de quase metade dos obtidos em 2.2. Foi portanto o processo usado em 4.

Verificámos ainda que não sendo o número de estados estacionários o mesmo para todos os níveis, como por exemplo quando é a aproximação de uma parábola por números inteiros, a precisão dos resultados não varlou sensivelmente para populações de electrões da mesma ordem.

4 — A DISTRIBUIÇÃO DE UMA POPULAÇÃO DE ELECTRÕES N_o À TEMPERATURA T, NUM SEMICONDUTOR HOMOGÉNEO COM PRESENÇA SIMULTÂNEA DE IMPUREZAS DE SUBSTITUIÇÃO DADORAS E ACEITADORAS PARCIALMENTE IONIZADAS.

4.1 — A banda proibida

Corresponde a um conjunto discreto de níveis para os quais não há estados estacionários e portanto as vagas e os preenchimentos são sempre nulos.

4.2 — Elementos dadores

Havendo impurezas de substituição correspondentes a elementos da coluna V do quadro de Mendeléef (tipo dador) em número muito menor que o dos átomos da coluna IV que substituem na rede cristalina, corresponde-lhes um único nível de energia, W_D, na banda proibida. Pretendemos saber de N_D dadores quais os que se encontram ionizados, N_D^+, tendo libertado um electrão de valência e os que não estão ionizados, N_D^X. Será necessariamente $N_D = N_D^+ + N_D^X$.

Um dador ionizado só tem ligações de covalência completas. Como nestas os spin dos dois electrões envolvidos são anti-paralelos nenhum deles pode ser trocado. Num dador não ionizado o electrão isolado pode ter um dado spin ou o anti-paralelo.

Em qualquer nível a soma do número de vagas com o número de preenchimentos é constante e igual ao número de estados de movimentos estacionários existentes nesse nível. Num nível intrínseco, a soma do número de hipóteses de emissão de electrões com o número de hipóteses de captação é também constante pelo que pudemos referir-nos respectivamente a preenchimentos e vagas: quando sai um electrão há menos uma hipótese de emissão, (menos um preenchimento) e mais uma hipótese de captação, (mais uma vaga). Num nível dador, quando o centro dador se ioniza libertando um electrão, o número de hipóteses de emissão baixou de uma unidade, mas o número de hipóteses de captação subiu de duas unidades visto que o centro dador tanto pode captar um electrão com um dado spin como com o antiparalelo. Quando um centro dador ionizado capta um electrão o número de hipóteses de captação baixa de dois e o número de hipóteses de emissão sobe de uma unidade. Por comodidade continuaremos a falar de vagas e preenchimentos designados respectivamente por NV e NP. (Quadro III).

Os resultados previstos para a repartição de N_o^* electrões por N_D estados dadores e N_i estados correspondentes aos níveis sem impurezas, para uma energia total W_o é [1]

$$\frac{N_D^X}{N_D} = \left[1 + \frac{1}{2} \exp \left(\frac{W_D - W_F}{kT} \right) \right]^{-1} \qquad (4.1)$$

sendo kT e W_F determinados por (1.1a), (4.2) e (4.3)

$$N_o = \sum_{i \neq D}^{i} n_i + N_D^{\times} \tag{4.2}$$

$$W_o = \sum_{i \neq D}^{i} n_i W + N_D^{\times} W_D \tag{4.3}$$

4.3 — Elementos aceitadores

Com N_A impurezas de substituição da coluna III (tipo aceitador), uma vez envolvidos os três electrões de valência em ligações de covalência com os átomos vizinhos, da coluna IV, fica uma ligação de covalência incompleta. Na ignorância do spin do electrão nela envolvido não sabemos qual o spin do electrão que a completa. Ao ionizar-se um centro aceitador por captação de um electrão o número de hipóteses de emissão cresce de duas unidades, visto que esse electrão tanto pode ter entrado com um spin como com o antiparalelo; o número de hipóteses de captação cresce de uma unidade. Ao libertar um electrão, no nível aceitador o número de hipóteses de emissão baixa de duas unidades e o número de hipóteses de captação cresce de uma unidade.

Sendo W_A a energia do nível da banda proibida que corresponde aos aceitadores, quando nele entra um electrão há mais dois preenchimentos e menos uma vaga; quando sai há menos dois preenchimentos e mais uma vaga.

O preenchimento final do nível aceitador deverá ser dividido por dois para obter o número de aceitadores ionizados N_A^-. O preenchimento inicial do nível é obrigatoriamente par.

O comportamento de um nível aceitador não é pois o de um nível dador com uma energia abaixo do meio da banda proibida.

O valor previsto para a ionização de aceitadores é [1]

$$\frac{N_A^-}{N_A} = \left[1 + 2 \exp\left(\frac{W_A - W_F}{kT} \right) \right]^{-1} \tag{4.4}$$

com kT e W_F determinados por (1.1a), (4.5) e (4.6)

$$N_o = \sum_{i \neq A}^{i} n_i + N_A^- \tag{4.5}$$

$$W_o = \sum_{i \neq A}^{i} n_i W_i + N_A^- W_A \tag{4.6}$$

4.4 — Presença simultânea de dadores e aceitadores

Por um caminho análogo ao seguido em [1] para a dedução de (1.1a), (4.1) e (4.4) verifica-se que em caso de coexistência de níveis dos três tipos estas expressões continuam válidas sendo W_F e kT determinados por

$$N_o = \sum_{i \neq D,A}^{i} n_i + N_D^{\times} + N_A^- \tag{4.7}$$

$$W_o = \sum_{i \neq D,A}^{i} n_i W_i + N_D^{\times} W_D + N_A^- W_A \tag{4.8}$$

4.5 — O modelo. Resultados.

O comportamento dos electrões no modelo que simula a presença simultânea de dadores e aceitadores está resumido no quadro III em que NP e NV são respectivamente os preenchimentos e vagas num dado nível.

QUADRO III

Tipo de nível / Comportamento	Intrínseco	Dador	Aceitador
Na entrada	NP=NP+1 NV=NV−1	NP=NP+1 NV=NV−2	NP=NP+2 NV=NV−1
Na saída	NP=NP−1 NV=NV+1	NP=NP−1 NV=NV+2	NP=NP−2 NV=NV+1

A temperatura pretendida para a situação de equilíbrio é fixada conforme descrito em 3.2. A evolução para o equilíbrio não se faz a energia constante, não se mantendo W_o (4.8) mas só N_o (4.7).

No exemplo apresentado o número de estados estacionários é de 20 para os níveis 1 a 9 e 14 a 20. Os níveis 11 e 12 são proibidos. O nível 10 é aceitador com $N_A = 20$ e o 13 é dador com $N_D = 20$.

Na situação inicial estavam completamente preenchidos os níveis 1 a 9 e vazios os níveis 14 a 20. Os aceitadores estavam todos ionizados, havendo 40 preenchimentos correspondentes a 20 electrões. Os dadores estavam todos ionizados havendo 40 vagas correspondentes à possibilidade de ocupação pelos 20 electrões dos dadores. A temperatura da situação inicial é portanto zero graus Kelvin.

Na fig. 5 e no quadro IV apresentam-se os valores das médias das 10 000 últimas colisões de 10 000 e 20 000 comparados com os valores previstos por (1.1a), (4.1) e (4.4) à temperatura T do banho, com um erro menor que 0.005/20. $N_o = 200$; com origem numa situação inicial em que a banda de valência estava completamente preenchida, a de condução estava vazia, e os electrões dos dadores estavam a ocupar os aceitadores que são em igual número, obtivemos à temperatura T uma ionização parcial tanto dos dadores como dos aceitadores, uma banda de condução fracamente preenchida, e uma banda de valência fortemente preenchida.

QUADRO IV

Nível	Previstos	10 000 col.	20 000 col.
1	20.00	20.00	20.00
2	20.00	20.00	20.00
3	20.00	20.00	20.00
4	19.99	19.99	19.99
5	19.97	19.98	19.96
6	19.92	19.92	19.92
7	19.78	19.79	19.80
8	19.41	19.43	19.48
9	18.48	18.43	18.66
Aceit.	13.83	13.60	13.88
Proib.	0	0	0
Proib.	0	0	0
Dador	6.17	6.13	5.85
14	1.52	1.77	1.65
15	.59	.66	.49
16	.22	.19	.08
17	.08	.06	.17
18	.03	.06	.07
19	.01	.00	.00
20	.00	.00	.00

Atendendo a que (1.1) goza da propriedade (4.9)

$$f\left(\frac{W-W_F}{kT}\right)=1-f\left(-\frac{W-W_F}{kT}\right) \qquad (4.9)$$

a que se W_A e W_D forem simétricas em relação a W_F se verifica (4.10) para $N_D=N_A=N$

$$N_D^{\times}+N_A^{-}=N \qquad (4.10)$$

e a que da neutralidade eléctrica resulta (4.11)

$$N_D^{+}+p=N_A^{-}+n \qquad (4.11)$$

é de esperar, para um número de estados estacionários igual para níveis simétricos em relação ao meio da banda proibida, que o número de electrões na banda de condução, n, seja igual ao número de buracos na banda de valência, p e igual ao preenchimento intrínseco, coincidindo o nível de Fermi com o meio da banda proibida.

Os valores médios obtidos foram às 10 000 colisões $n_{av}=2.74$, $p_{av}=2.47$ e às 20 000 colisões $n_{av}=2.45$, $p_{av}=2.18$; uma vez que os preenchimentos estão sujeitos a flutuações é de esperar uma diferença entre os valores de n e p da ordem de grandeza dessas flutuações. (Os níveis que mais contribuiram para n e p foram precisamente dos que maiores flutuações tiveram).

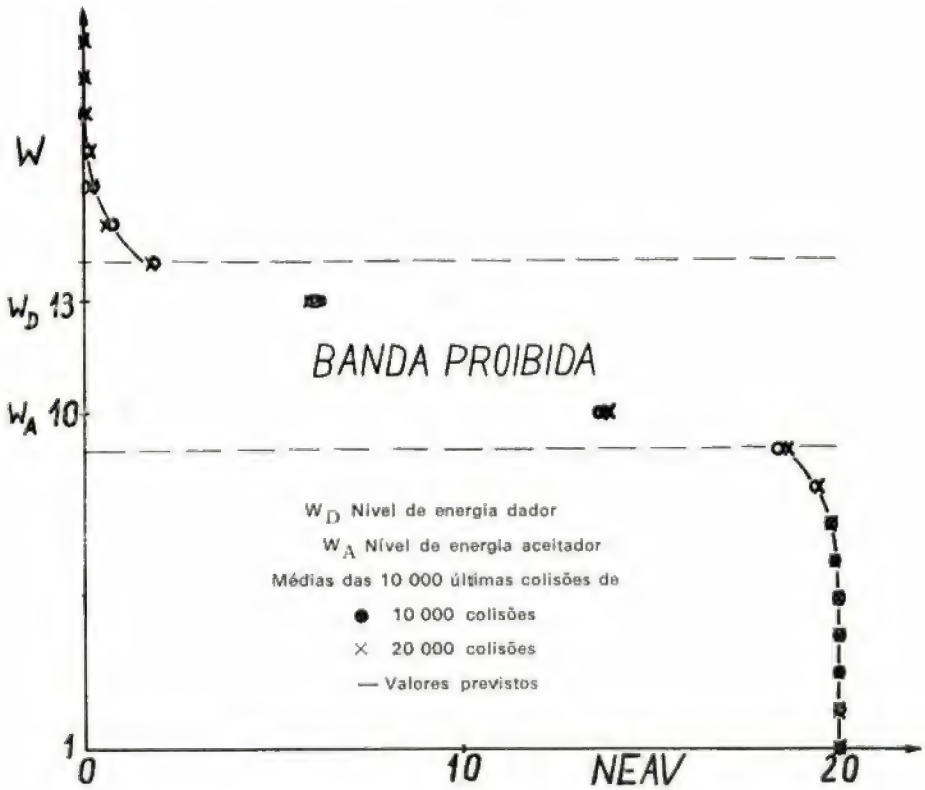


Fig. 5 — Preenchimento médio NEAV dos diversos níveis de energia W

As flutuações para os diferentes níveis foram menores que 0.29/20 e as diferenças entre os valores previstos e encontrados menores que 0.33/20.

Apesar da colisão dos electrões num semicondutor ser principalmente com fonões (tradução corpuscular da acção das vibrações da rede cristalina sobre os electrões [3]), mecanismo esse que o nosso modelo ignora, substituindo-o por colisões entre electrões do gás em estudo com electrões do «banho», os resultados são próximos dos previstos porque o processo aliatório pelo qual se dão as trocas de energia (colisões) não é determinante do resultado final. Sé-lo-à sim do modo como o estado de equilíbrio é atingido.

5 — CONCLUSÕES

É possível, à custa de um modelo que traduz o comportamento dos electrões determinante para a obtenção da distribuição de equilíbrio, obter, com um tempo de CPU permissível por simulação numérica no domínio dos pequenos números, resultados próximos dos previstos para grandes populações pela estatística de Fermi-Dirac.

6 — AGRADECIMENTO

O autor agradece ao Prof. Doutor-Engenheiro J. F. Borges da Silva as sugestões e orientação prestadas, e também ao Eng.º Viegas Gonçalves os dados bibliográficos [2].

BIBLIOGRAFIA

[1] E. Spenke, «Les semiconducteurs électroniques», Dunod, 1959, anexo III.

[2] «Number theory background for the power residue method», brochura IBM CG 20-8011-0 (extracto).

[3] E. Spenke, «Les semiconducteurs électroniques», Dunod, 1959, pag. 223.

APÊNDICE

São dados para cada nível de energia i

W_i — energia no nível i

N_{iA} — estados estacionários no nível i para o gás A

N_{iB} — estados estacionários no nível i para o gás B

e para o conjunto

N_{oA} — número de electrões do gás A

N_{oB} — número de electrões do gás B

W_o — energia total do conjunto dos gases A e B

Pretendemos a distribuição mais provável (a que se pode realizar de um maior número de maneiras), ou seja, para cada um dos níveis

n_{iA} — número de electrões do gás A no equilíbrio no nível i

n_{iB} — número de electrões do gás B no equilíbrio no nível i

O número de maneiras de distribuir no nível i de energia W_i, n_{iA} electrões por N_{iA} estados e n_{iB} electrões por N_{iB} estados é dado admitindo o princípio de exclusão de Pauli, pelo produto das combinações sem repetição

$$\binom{N_{iA}}{n_{iA}} \times \binom{N_{iB}}{n_{iB}} \tag{A.1}$$

O número de maneiras de realizar uma distribuição correspondente aos i níveis é

$$m = \prod^{i} \binom{N_{iA}}{n_{iA}} \times \binom{N_{iB}}{n_{iB}} =$$

$$= \prod^{i} \frac{N_{iA}!\, N_{iB}!}{n_{iA}!\,(N_{iA}-n_{iA})!\; n_{iB}!\,(N_{iB}-n_{iB})!} \tag{A.2}$$

devendo ser

$$\sum_i n_{iA} = N_{oA} \tag{A.3}$$

$$\sum_i n_{iB} = N_{oB} \tag{A.4}$$

$$\sum_i (n_{iA}+n_{iB})\, W_i = W_o \tag{A.5}$$

Pretendemos determinar n_{iA} e n_{iB} que tornam máximo o valor de (A.2) estando os n_{iA} e n_{iB} ligados por (A.3), (A.4) e (A.5). Sendo a função logarítmo uma função monotónica do argumento vamos determinar o máximo do logaritmo da expressão (A.2).

Utilizando os multiplicadores de Lagrange α, γ, β para ter em conta respectivamente (A.3), (A.4) e (A.5) procuramos o máximo de

$$\log m + \alpha\,(N_{oA} - \sum_i n_{iA}) + \gamma(N_{oB} - \sum_i n_{iB}) + \beta\left[W_o - \sum_i (n_{iA}+n_{iB})\, W_i\right] \tag{A.6}$$

Igualando a zero as derivadas parciais de (A.6) em ordem a n_{iA}, n_{iB}, α, γ, β, obtemos

$$\frac{\partial \log m}{\partial n_{iA}} + \alpha \frac{\partial}{\partial n_{iA}} (N_{oA} - \sum_i n_{iA}) + \beta \frac{\partial}{\partial n_{iA}} \left[W_o - \sum_i (n_{iA}+n_{iB}) W_i\right] = 0 \tag{A.7}$$

$$\frac{\partial \log m}{\partial n_{iB}} + \gamma \frac{\partial}{\partial n_{iB}} (N_{oB} - \sum_i n_{iB}) +$$

$$+\beta \frac{\partial}{\partial n_{iB}} \left[W_o - \sum_i (n_{iA} + n_{iB}) W_i \right] = 0 \qquad (A.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\alpha (N_{oA} - \sum_i n_{iA}) \right] = 0 \qquad (A.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\gamma (N_{oB} - \sum_i n_{iB}) \right] = 0 \qquad (A.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \beta \left[W_o - \sum_i (n_{iA} + n_{iB}) W_i \right] \right\} = 0 \qquad (A.11)$$

As três últimas equações conduzem respectivamente a (A.3), (A.4) e (A.5)

de (A.2)

$$\log m = \sum_i \left[\log N_{iA}! - \log n_{iA}! - \log (N_{iA} - n_{iA})! + \right.$$

$$\left. + \log N_{iB}! - \log n_{iB}! - \log (N_{iB} - n_{iB})! \right] \qquad (A.12)$$

Calculando $\frac{\partial}{\partial n_i} \log m$ com $n_i \gg 1$ como

$$\frac{\partial}{\partial n_i} \log m \simeq \left[\log m \right]_{n_i} + 1 \left[\log m \right]_{n_i}$$

de (A.7) e (A.12)

$$-\log n_{iA} + \log (N_{iA} - n_{iA}) - \alpha - \beta W_i = 0 \qquad (A.13)$$

ou simplificando

$$\frac{n_{iA}}{N_{iA}} = \left[1 + \exp (\alpha + \beta W_i) \right]^{-1} \qquad (A.14)$$

Analogamente de (A.8) e (A.12)

$$\frac{n_{iB}}{N_{iB}} = \left[1 + \exp (\gamma + \beta W_i) \right]^{-1} \qquad (A.15)$$

correspondendo α a $-\frac{W_{FA}}{kT}$, γ a $-\frac{W_{FB}}{kT}$ e β a $\frac{1}{kT}$

não sendo necessariamente as energias do nível de Fermi, W_{FA} e W_{FB} as mesmas para os dois gases, à mesma temperatura T.

Feiras, Conferências, Exposições e Congressos

OBJECTIVOS E PROGRAMA	LOCAL, DATA, ORGANIZAÇÕES E INFORMAÇÕES
BI-MU — 10.° Biennale della macchina utensile	Milão 2 a 9 de Outubro - 76
National Computer Conference & Exposicion	New York 7 a 10 de Junho - 76
Internationale Conference of the foll and Die Industry	Viena Maio - 77
L 'INTERPACK' 78 — 8.° Feira Internacional de Máquinas ed Embalar	DÜSSELDORF 8 a 14 de Junho - 78
AVFALL 76 — Internacional Trade Fair ou Waste Hondliceg	27 de Setembro a 1 de Outubro - 76 Elmia, Jövköping - Sweden

C.D.U. 5.001

Research and the Future
A investigação e o futuro

C. L. Boltz

COMMUNICATING WITH LIGHT

For the first time, it is believed, optical glass-fibres are being installed in an aircraft. The British company Marconi-Elliott Avionics is producing optical data transmission in connection with the flight-control electronics for the Boeing YC-14 AMST (advanced medium stol transport) aircraft now being studied by the United States Air Force.

Transmission of light along a glass-fibre has an advantage over electrical cables because there is no possibility of interference by radio or radiation. A light-signal can of course be modulated to convey meaningful information, and the British Post Office, many industrial firms and research establishments are involved in long-term research to produce glass-fibres and apparatus suitable for telecommunications over long distances. One company, Pilkington Brothers, has already produced the cheapest communications glass-fibre for use over short distances — that is up to about 200 metres rather than many kilometres. It is this fibre that Marconi-Elliott Avionics is using in its work for Boeing.

Entry Cone

Glass-fibre for communications has a core of pure glass and an outer layer of glass of lower refractive index. A ray of light, travelling along the central fibre and striking the interface between core and outer layer is totally internally reflected, provided that the angle at which it strikes is small enough. The precise value of this angle depends on the difference in refractive index between the two sorts of glass. Pilkingtons new glass-fibre allows what the company calls an «entry cone» of 60 degrees, that is to say, all light-rays striking the interface at up to that angle will be internally reflected. This, it is claimed, is the highest entry cone yet achieved for any glass-fibre.

Furthermore this result is achieved by using normal glass-making techniques. Fibres have been reported with high transmission perfomance (because the bigger the entry cone less the light that is lost directly through the interface) which depends on sophisticated manufacturing techniques such as the deposition of silica from vapour, but such techniques cannot easily be scaled up for mass production. The Pilkington method can be so expanded.

The product is called Hytran 100 and offers a signal attenuation (or loss) of some 50 dB/km, that is a drop of only 2 dB in a length of 40 m. Owing to the wide permissible entry cone there is no need to use lasers in order to produce nearparallel light beams, and the smallness of the drop over a usable length of fibre means that the source of light can be the well-known LED (light-emiting diode) now widely used for information display purposes.

Hytran 100 could accommodate many data-transmission channels over a useful distance. It would therefore suit the new optical-signal control system for computers, telephone conversations within an exchange, and date signals in power engineering.

A BOOM TO BEAT OIL POLLUTION

A new system for clearing the sea of oil slicks has been used under emergency conditions off the western Irish coast, where an oil tanker developed a leak.

The system is British Petroleum's Vikoma. This has two separate parts: one to enclose the floating oil and move it over the surface to a convenient place; and one to pump up the oil for discharge into a container. The first part is a ballasted, flexible boom comprising three tiered cylinder made of a synthetic-rubber textile. The bottom cylinder is filled with water and so acts as ballast and keel. The middle cylinder contains air and so has buoyancy, and the smaller-diameter top cylinder is filled with compressed air, so that it acts as a cuff or protection against obstacles. All three cylinders are fastened together and can be exhausted of air and water and then folded flat for transport or storage.

When a large patch of oil is to be swept, any wind would of course not only drive the oil along but also the boom — which because of its protruding bulk would be blown along faster if arrangements were not made to prevent this. So sea-anchors are fitted to ensure

that the whole U-shaped drogue moves more slowly in the wind and thus can be kept to windward of the oil and able to enclose it.

Wheel Pumps

Removal of oil from the artificial lagoon created by the boom is achieved by wheels which spin on a horizontal axis —that is, the plane of the wheels is vertical. The lower rotating part of each wheel dips into the oil and picks it up by surface attraction. Above the surface of the sea, the oil is wiped off the wheels and pumped into a container.

A large version of the system will remove 100 tonnes of oil an hour. A smaller version, for use in shallow waters, removes 10 tonnes an hour and can be pushed along by a man. Using the large system, both collection and removal of oil can be done in sea conditions up to nearly gale force, it is claimed.

Several BP Vikoma systems are now ready for use round Britain's coasts. Further, Britain's Department of Trado is itself establishing coastal pollution-control centres, for which BP is offering the use of its systems.

SCIENCE AND OFFSHORE SAFETY

Although oil drilling rigs and production platforms are so much in the news, almost all the technical information about them has been gathered from operations in relatively calm, shallow waters such as the Gulf of Mexico. Now realistic data have to be found for structures in the often hostile seas around the coasts of Britain.

A scheme of ten research projects suggested by an Offshore Structure Fluidloading Group of oilmen and engineers is to be coordinated by Britain's National Physical Laboratory. The NPLIs Maritime Science Division has undertaken the major experiment, based on a special rig being built in Christchurch Bay on the south coast of England where westerly winds sometimes rise to hurricane force and there is a useful range of sea currents. True, the conditions are not those of the North Sea, but they are realistic enough to give data that can be extrapolated for those conditions. The seabed has been cored by the Institute of Oceanographic Sciences to a depth of 3 m to give information about the immediate rock formations.

Transducer Rig

The basis of the experimental arrangement is a central solid column, 11 m high and 2,8 m diameter, set in concrete on the seabed. Six steel collars surround the column (which projects 3 m or so above the water surface) to house pressure transducers. A much thinner column is erected some distance from the main tower and is attached to it by long brackets. On the thin column there are accelerometers and other transducers to measure wave velocities and accelerations. The whole rig thus forms a very large, highly sensitive multiple transducer, providing altogether 80 channels of information on the steel structure and 50 in the base. All readings will be transmitted to the NPL maritime laboratory at Hythe, some 20 km away.

Part of the experimentation will be to test the measuring devices themselves. But mainly the intention is to obtain realistic data for use in, or even to modify, the established Morison equation which states the relationship between force, wave velocity and acceleration. Information is urgently needed to suit the conditions of open sea. There is a scheme for a minicomputer on the Christchurch rig to monitor the measured data and send the information by telemetry to Hythe.

It is believed that, by suitable manipulation and scaling-up in time, the transducer rig will in two years give enough information to show in advance what a real, drilling rig or production platform will experience in 20 years of use. The experiment should be under way by the summer of 1975. A model was shown at the Offshore International Exhibition in London during October 1974.

UNDERWATER TELEVISION SCANS TANKER BOTTOMS

Studies at the UK Atomic Energy Authority's research establishment at Harwell in southern England have led to the production of a device that can examine the bottoms of large oil tankers while they are still in the water. Dry-docking for such examinations is very expensive, and for tankers of 400 000 tonnes or more is a major operation. Yet the ships' bottoms must be examined every 18 months or so to look for possible damage, which could if it existed mean immense financial loss and great pollution from leakage of cargo.

The new British device, called SCAN, which is ready for trials, can do its examination under remote control and can then be packed up and taken elsewhere for use another ship.

It is a relatively small, saucer shaped device designed to «crawl» along the bottom of the tanker. Controlled through a cable connected to a surface ship, it has three hydraulic motor driven wheels which are held by buoyancy against the ship's hull.

Carried By Diver

When transported, the whole apparatus has neutral buoyancy; that it, it has about the same density as sea water. So a diver can carry it down place it in position. Air is then blown into a buoyancy tank, giving the positive buoyancy necessary to drive it upwards against the ship's bottom.

There are two television cameras on the device — one for close-up viewing and one for longer-range use at low light levels. A lamp provides necessary illumination of the hull. There is also a 35 mm still-camera for photographing any area chosen for special examination. In the surface ship to which SCAN is connected an operator monitors the pictures and steers the trolley

along specially painted lines, or welding seams, on the hull. Thus the whole of the bottom is systematically searched. Colour film or video tape can be used to make a permanent record.

INSTANT SPLINTS FOR SURGICAL USE

A new type of inexpensive surgical splint invented and developed in Britain can take the place of plaster of Paris bandages and specialised splints. It depends on a new combination of materials and is the result of several years' research at the British Medical Research Council's laboratories in the new Clinical Research Centre at Northwick Park, northwest of London. So they are known as Northwick splints.

No heating, tools or water are necessary, and removal of the splint involves no cutting or sawing. A Northwick splint can, moreover, be adjusted in shape as a limb changes during healing or because of manipulative therapy. It can be incorporated into the dressing of a wound. The most obvious immediate use is in place of plaster of Paris bandages, which are both messy and time-consuming to apply and remove.

The material used is sufficiently plastic to be bent to shape by hand, yet for its purpose it remains rigid enough. This degree of stiffness is endowed mainly by expanded metal — a network which is formed by stamping and stretching the sheet material to produce open meshes. For the Northwick splint this expanded metal is aluminium, anodised and coloured pink. This is moulded inside a thin, solid layer of polyethylene (PE).

Foam Lining

On the inner surface of the moulding is a layer of PE foam. This allows the layer of solid PE to be thin, giving enough bulk for an effective splint yet permitting easy shaping.

Shaping can be done quickly so, the Northwick splint is especially useful in acute situations. No pre--measurement is necessary. Because the arrangement is modular, pieces can be put together and shaped immediately. As the material is flesh-coloured it is cosmetically acceptable as well as being easily washable and sterilisable. The design has been patented and the splints are being made commercially by a British company.

NOW HEART PERFOMANCE CAN BE FORECAST

A ballistocardiograph is a device which responds to the body movement due to pumping action of the heart and so is different in principle from the more commonly used electrocardiograph in which the heart's action is observed by means of electrical signals in the body. Normally, however, the thing that responds to the body's movement in ballistocardiography is a special bed, which obviously is not portable or even available except in a few places.

However, scientists at the British Medical Research Council's Clinical Research Centre near London have now devised a way of replacing the bed by a small capsule connected to solid-state electronics. Thus the Centre's new ballistocardiograph is small and portable. It can be taken anywhere and the person tested may be standing up or sitting down and need not remove any clothes. It has been used in intensive-care units.

The system is based on a small capsule which is fixed with tape to the person's rigth shoulder. This capsule has a rubber diaphragm with a weight in the middle, the inertia of which makes the rubber move and thus change the volume of air in a plastics tube that connects the capsule to another, metallised, diaphragm which is part of a capacitor (an electrical condenser). So as the body moves the electric capacitance is changed, causing the output voltage from a small electronic circuit to vary accordingly. The result can be shown on a cathode-ray tube oscilloscope or recorded on normal electrocardiogram paper.

Controlled Sensitivity

The system is extremely sensitive — even the pressure of fingers on a table is shown on the record. Such high sensitivity has to be controlled, of course, so that the recorded trace is not confused by background interference. Indeed, part of the success of the new ballistocardiograph system is due to the research undertaken to damp down spurious low-frequency noise by leaking away some of the air in the plastics tube. The high amplification of the electronic circuitry compensates for this leak.

Ballistocardiographs have been shown to be a good predictor of heart trouble, even when an electrocardiogram looks normal. Irregularities in the trace are seen before there is clinical evidence of heart disease. Research with sufferers from high blood pressure has shown that the ballistocardiograph predicts which of them may develop serious heart disease. Thus the new, portable version is a simple but valuable addition to the physican's armoury, usable anywhere. It opens up possibilities not only for use in emergencies but where a sensisitive means is needed for deciding whether a heart is still beating.

Synopsis of articles published in «Técnica» n.° 433

LI — February 1976

U. D. C. 007.51.951

ANTÓNIO GOUVÊA PORTELA

INTRODUCTION TO FUZZY SETS

Técnica n.° 433 — LI — 2-1976, p. 201 a 207

An Introduction to the Theory of Fuzzy Sets, in view of applications to various domains, namely to Engineering Science.

U. D. C. 378.12:331.8.00

JOSÉ Q. ROGADO

ON THE REORGANIZATION OF THE PORTUGUESE UNIVERSITIES TEACHING (FULL-TIME PROFESSORS'STATUS; KIND OF COURSES; AUTONOMY)

Técnica n.° 433 — LI — 2-1976, p. 175 a 182

The author tackles with general problems connected with the reorganization of the Portuguese University teaching. The attempt is to frame this problem into the new portuguese situation. The autonomy of the schools and the full time Professors'status are two points somehow developed in the text.

U. D. C. 621.389:537.311

H. J. S. ABREU SANTOS

A NUMERICAL SIMULATION METHOD TO OBTAIN THE ENERGY DISTRIBUTION OF A POPULATION OF ELECTRONS

Técnica n.° 433 — LI — 2-1976, p. 219 a 229

The calculation of the distribution of a population of electrons by the different energy levels on the basis of the results given by the Fermi-Dirac statistics often involves morose calculations. An alternative method by numerical simulation is proposed, based on a model discribing the significant behaviour of the electrons; applicable to small populations it leads nevertheless to results close to those obtainable by the Fermi-Dirac statistics. A situation of the type met in semiconductors with partly ionised donor and acceptor impurities is studied.

U. D. C. 624.074

J. S. BRAZÃO FARINHA

ANALYSIS OF SPACE FRAMES

Técnica n.° 433 — LI — 2-1976, p. 183 a 199

It is succintly stated the application of the Cross method on the resolution of rigid space structures, constituted by bars of constant or variable inertia, of rectilinear axle, orthogonal between them, or not.

Some application examples are presented.

Resumo dos Artigos publicados na «Técnica» n.º 433

Ano LI — Fevereiro 1976

C. D. U. 378.12:331.8.00

JOSÉ Q. ROGADO

SOBRE A REESTRUTURAÇÃO DA CARREIRA DOCENTE NAS UNIVERSIDADES PORTUGUESAS (DEDICAÇÃO EXCLUSIVA; NATUREZA DOS CURSOS; AUTONOMIA)

Técnica n.º 433 — LI — 2-1976, p. 175 a 182

O artigo trata do problema da reestruturação da carreira docente das Universidades Portuguesas, procurando enquadrá-lo dentro de princípios gerais no que respeita o tipo de ensino mais conveniente em face da situação actual portuguesa.
São tratados com algum detalhe os aspectos de «dedicação exclusiva» e da autonomia das Universidades.

C. D. U. 007.51.951

ANTÓNIO GOUVÊA PORTELA

INTRODUÇÃO AOS CONJUNTOS VAGOS

Técnica n.º 433 — LI — 2-1976, p. 201 a 217

Trata-se duma introdução à Teoria dos Conjuntos Vagos com vista a aplicações a vários domínios nomeadamente à Engenharia.

C. D. U. 624.074

J. S. BRAZÃO FARINHA

CÁLCULO DE ESTRUTURAS RETICULADAS NO ESPAÇO

Técnica n.º 433 — LI — 2-1976, p. 183 a 189

Expõe-se sucintamente a aplicação do método de Cross na resolução de estruturas espaciais, constituídas por barras de momento de inércia constante ou variável, de eixo rectilíneo, ortogonais entre si, ou não.
Apresentam-se alguns exemplos de aplicação.

C. D. U. 621.389:537.311

H. J. S. ABREU SANTOS

OBTENÇÃO POR SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA DISTRIBUIÇÃO EM ENERGIA DE UMA POPULAÇÃO DE ELECTRÕES

Técnica n.º 433 — LI — 2-1976, p. 219 a 229

A determinação da distribuição em equilíbrio termodinâmico dos electrões de uma população pelas diversas energias obriga em muitos casos a cálculos trabalhosos se recorrermos aos resultados da estatística de Fermi-Dirac. Apresenta-se outra alternativa, por simulação numérica, com base num modelo que traduz os aspectos relevantes do comportamento dos electrões; aplicável no domínio dos pequenos números, conduz no entanto a resultados próximos dos previstos pela estatística de Fermi-Dirac. Faz-se o estudo de uma situação do tipo encontrado num semicondutor com impurezas dadoras e aceitadoras simultâneas e parcialmente ionizadas.

Publicações Recebidas

PUBLICAÇÕES PERIÓDICAS

— AGROS
Associação dos Estudantes de Agronomia

— ANALLES DE MECÂNICA Y ELECTRICIDAD
Asociacion de Ingenieros del I. C. A. I.

— ASEA — REVUE

— ACTA TÉCHNICA
Academiae Scientiarum Hungariae

— ANAIS DO CLUBE MILITAR NAVAL

— ANALYTICAL ABSTRACTS
Society for Analytical Chemistry

— ACIER - STAHL - STELL

— ANNALES
Institut Technique du Batiment et des Travaux Public

— AEG - TELEFUNKEN AL DIA

— AR COMPRIMIDO
Atlas Copco

— BOLETIM DA CÂMARA MUNICIPAL DE SÁ DA BANDEIRA

— BOLETIM ECONÓMICO E FINANCEIRO
Banco Bo.ges e Irmão

— BOLETIM
Instituto Nacional de Investigação Industrial

— BOLETIM MENSAL DE INFORMAÇÃO
Laborató.io Nacional de Engenharia Civil

— BULLETIN OF THE SEISMOGRAPHIC STATIONS
University of California

— BOLETIM DEL CEMENTO PORTLAND
Instituto del Cemento Portland Argentino

— BOLETIM GTH
Gabinete Técnico da Habitação da Câmara Municipal de Lisboa

— BOLETIM
Sociedade Geológica de Portugal

— BOLETIM INFORMATIVO IRANOR
Instituto Nacional de Racionalizacion y Normalizacion

— BOLETIM DA ELECTROQUÍMICA E CORROSÃO
Instituto Nacional de Investigação Industrial

— BOLETIM
Departamento de Imprensa e Informação do Governo da República Federal da Alemanha

— BOLETINUL
Institutului Politehnic Bucaresti

— BOLETIM
Associação Industrial de Angola

— BOLETIM DO PORTO DE LISBOA
Administração-Geral do Porto de Lisboa

— BOLETIM DO SERVIÇO CARTOGRÁFICO DO EXÉRCITO

— BOLETIM DE MINAS
Direcção Geral de Minas e Serviços Geológicos

— BULLETIN DE LA CHAMBRE DE COMMERCE BELGE AU PORTUGAL

— BULLETIN
Agence Internationale de L'energie Atomique
Instituto dos Produtos Florestais

— CENIM

— CORTIÇA
Centro Nacional de Investigaciones Metalurgicas

— (JOURNAL OF) CHEMICAL EDUCATION
Division of Chemical Education of the American Chemical Society

— CIMENTO E CONCRETO
Associação Brasileira de Cimento Portland

— COMUNICAÇÕES ELÉCTRICAS
International Telephone and Telegraph Corporation

— CONSTRUCTI

— CARTA GEOLÓGICA DE ANGOLA
Direcção Provincial dos Serviços de Geologia e Minas

— CEMENTO HORMIGÓN

— COURRIER CERN

— COLLECTION
Czechoslovak Academy of Sciences

— DYNA
Asociacion de Engenieros Industriales de España

— EL ESTAÑO Y SUS APLICACIONES
Tin Research Institute

— ELECERICITE DE FRANCE
Direction des Etudes et Recherches

— ELECTRICIDADE
Empresa Editorial Electrotécnica Edel, Lda.

— ENDEAVOUR
Imperial Chemical Industries Limited

— ESTUDOS
Banco Fomento Nacional

— ESTUDOS, NOTAS E TRABALHOS
Serviço de Fomento mineiro

— ELECTRICAL COMMUNICATION
International Telephone and Telegraph Corporation

— ECONOMIC REVIEW
Câmara de Comércio Luso-Britânica

— FUNDIÇÃO
Associação Portuguesa de Fundição

— FUNDEXPORT
Fundo de Fomento de Exportação

— GEOTÉCNICA
Revista da Sociedade Portuguesa de Geotécnica

— INFORMES DE LA CONSTRUCCIÓN
Instituto Eduardo Torroja

— ION
Sindicato Nacional de Indústrias Químicas

— INDÚSTRIA DE MOÇAMBIQUE
Associação Industarial de Moçambique

— LA HOUILLE BLANCHE
Société Hydrotechnique de France

— LES NOUVELLES DE L' E. I. B.

— METALLURGIA AND METAL FORMING
National Association of drop Forgers and Stampers

— MACHINE TOOL REVIEW

— NOTICIÁRIO DOS ELASTÔMEROS
du Pont

— ONU (CHRONIQUE MENSUELLE)
Service de L'information de L'organisation des Nations Unies

— O PROPULSOR
Sindicato Nacional dos Oficiais da Marinha Mercante

— PRELO
Imprensa Nacional - Casa da Moeda

— PORTUGAL - ALEMANHA
Câmara de Comércio e Indústria Luso-Alemã

— REVISTA DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS
Universidade de Lourenço Marques

— REVUE LANDIS E GYR (EDITION ELECTRICITÉ)

— REVUE D'IENA

— REVUE SIEMENS
Siemens Antiengesellschaft

— REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

— LA REACHERCHE AÉROSPATIALE
Office National D'Études et de Recherchse Aérospatiales

— REVISTA DE METALURGIA
Cenim - Centro Nacional de Investigaciones Metalúrgicas

— RAIL INTERNATIONAL
Association Internationale du congrès des chemins de fer et de L'Union Internationale des Chemins de fer

— REVISTA TÉCNICA SULZER

— REVISTA DANFOSS

— REVISTA AGRONÓMICA
Sociedade de Ciências Agronómicas de Portugal

— TECHNIQUES FRANÇAISES (BATIMENT TRAVAUX PUBLICS URBANISME)
Services Économiques de L'Embassade de France

— TECHNIQUES FRANÇAISES (INDUSTRIE DE METAUX
Services Économiques de L'Embassade de France

— TECHIQUES FRANÇAISES (TRANSPORTS)
Services Économiques de L'Embassade de France

— TECHNIQUES FRANÇAISES (CHIMIE GAZ PETROLE) BIENS DE CONSOMMATION)
Services Économiques de L'Embassade de France

— WORLD HEALTH ORGANIZATION PUBLICATIONS
World Health Organization

— WISSENSCHAFTLICHE ZEITSCHRIFT DER HOCSCHULE
Architektur und Bauwesen Weimar

VICENTE FERREIRA E BRAZÃO FARINHA

TABELAS TÉCNICAS

técnica

REVISTA DE ENGENHARIA DA ASSOCIAÇAO DOS ESTUDANTES
DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO - LISBOA

7ª EDIÇÃO REVISTA E ACTUALIZADA
PREÇO 250.00
DESC. 10% AOS ASSINANTES

Publicidade com critério.

Anuncie na

técnica REVISTA DE ENGENHARIA